Affine Geometrie – 11. Jahrgang

Gliederung

1. Vektoren

1.1 Darstellung von Vektoren

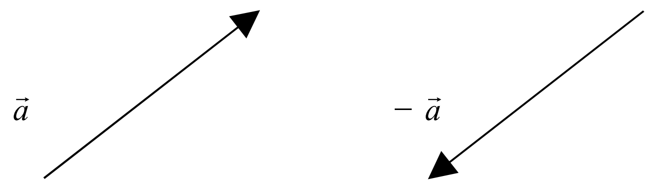
Vektor: Menge aller Pfeile, die in

- Länge,
- Richtung und
- Orientierung

übereinstimmen.

Nullvektor: Vektor der Länge 0

Gegenvektor: Ein Vektor, der mit einem Vektor $\vec{a}$ in Länge und Richtung übereinstimmt, aber entgegengesetzt orientiert ist.



Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\qquad -\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$

Darstellung im kartesischen Koordinatensystem:

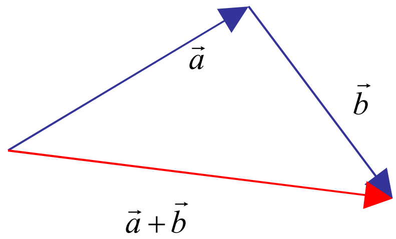
Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ hat den Anfangspunkt O(0;0;0) und den Endpunkt A(1;−3;7).

1.2 Rechnen mit Vektoren

Vektoraddition

Bilden des Summenvektors $\vec{a}+\vec{b}$

- zeichnerich: Der Anfang des Vektors $\vec{b}$ wird an das Ende des Vektors $\vec{a}$ gehängt. Der Summenvektor verläuft vom Anfang von $\vec{a}$ zum Ende von $\vec{b}$.



- rechnerisch:

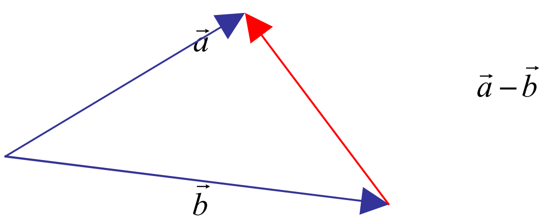
$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$$

Beispiel: $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$: $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}2+(-1)\\-5+0\\3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\\7\end{pmatrix}$

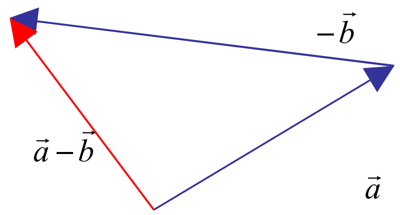
Vektorsubtraktion

Bilden des Differenzvektors $\vec{a}-\vec{b}$

- zeichnerisch: Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden an ihren Anfangspunkten zusammengefügt. Der Vektor $\vec{a}-\vec{b}$ verläuft von dem Ende des Vektors $\vec{b}$ zu dem Ende des Vektors $\vec{a}$.



Zum gleichen Ergebnis kommen Sie, wenn Sie die Subtraktion auf eine Addition zurückführen, also:
Statt $\vec{b}$ von $\vec{a}$ zu subtrahieren, addieren Sie den Gegenvektor $-\vec{b}$ zu $\vec{a}$:



- rechnerisch:

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{pmatrix}$$

Beispiel: $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$: $\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}2-(-1)\\-5-0\\3-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\-1\end{pmatrix}$

Multiplikation mit einem Skalar

Die Multiplikation mit einem Skalar kann die Länge und die Orientierung eines Vektors ändern, nicht aber die Richtung.

$$r\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}r\cdot a_1\\r\cdot a_2\\r\cdot a_3\end{pmatrix}\quad,\quad r\in R$$

Beispiele: $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}$ $\quad 3\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\-15\\9\end{pmatrix}$ $\quad -1\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\5\\-3\end{pmatrix}=-\vec{a}$

Die Vektoren $\vec{a}$ und $r\cdot\vec{a}$ sind kollinear (s. u.).

1.3 Lineare Abhängigkeit

Wir betrachten die lineare Abhängigkeit im dreidimensionalen Raum.

- Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen *linear abhängig*, wenn es reelle Zahlen r $\neq 0$ und s $\neq 0$ gibt, so dass $\vec{a} = r \cdot \vec{b}$ bzw. $\vec{b} = s \cdot \vec{a}$ gilt.

  Beispiel: Gegeben seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$.

  $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind also linear abhängig, d. h. ihre Pfeile verlaufen parallel.
  Man sagt auch, die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind *kollinear*.

- Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ heißen linear abhängig, wenn sich einer, z. B. $\vec{c}$, als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen lässt.
  Es muss dann zwei reelle Zahlen r $\neq 0$ und s $\neq 0$ geben, so dass $\vec{c} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ gilt.

  Beispiel 1: Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Die Vektorgleichung $\vec{c} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ liefert ein System von drei Koordinatengleichungen zur Bestimmung der reellen Zahlen r und s:

  I. $16 = 4r + s$
  II. $4 = 4r - 2s$
  III. $1 = 3r - 2s$

  Aus zwei der Gleichungen, etwa I. und II., berechnet man r und s.

  I.− II.: III. $12 = 3s$, also $s = 4$

  Einsetzen von $s = 4$ z. B. in Gleichung II. liefert

  $4 = 4r - 2 \cdot 4$, also $r = 3$.

  Dann ist zu prüfen, ob die beiden berechneten Werte für r und s auch die dritte Gleichung erfüllen:

  III. $1 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4$ w. A.

  $s = 4$ und $r = 3$ erfüllen somit die Vektorgleichung, d. h. die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig.
  Es gibt somit von jedem Vektor einen Pfeil, dass diese drei Pfeile in einer Ebene liegen.
  Man sagt auch, die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind *kollinear*.

Beispiel 2: Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

I. $16 = 4r + s$
II. $4 = 4r - 2s$
III. $2 = 3r - 2s$

Aus den ersten beiden Gleichungen berechnet man wie oben $s = 4$ und $r = 3$.

Einsetzen dieser Werte für r und s in die Gleichung III. liefert

III. $2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4$ f. A.

Die in diesem Beispiel gegebenen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind somit linear unabhängig, da es keine reellen Zahlen gibt, die das System der Koordinatengleichungen erfüllen. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ haben somit keine Pfeile, die in einer gemeinsamen Ebene liegen.

- Vier Vektoren im dreidimensionalen Raum können
  - linear abhängig sein: Sie haben dann alle vier Pfeile, die in einer Ebene liegen, die sogar zum Teil oder auch alle parallel sein können,
  - linear unabhängig sein: Dann spannen drei von ihnen den Raum auf und der vierte lässt sich als Linearkombination der drei anderen darstellen.

Die allgemeine Definition der linearen Abhängigkeit sowie andere Berechnungsmöglichkeiten finden sich im Buch auf S. 42 – 44.

2. Geraden- und Ebenengleichungen

2.1 Geradengleichungen

Um die Lage einer Geraden im Raum festzulegen, benötigt man zwei Vektoren, einen Stützvektor und einen Richtungsvektor.
Der *Stützvektor* $\vec{p}$ führt vom Koordinatenursprung zu einem (beliebigen) Punkt auf der Geraden.
Der *Richtungsvektor* $\vec{t}$ legt die Lage der Geraden im Raum fest.

Das bedeutet zeichnerisch: An den Pfeil des Stützvektors hängt man alle möglichen Verkleinerungen und Vergrößerungen des Richtungsvektors und erhält so als Resultierende die Pfeile vom Koordinatenursprung zu den einzelnen Punkten der Geraden.

Gleichung: $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}, \quad t \in R$

Aufstellen einer Geradengleichung

Beispiel 1: Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B.
Der Ortsvektor zu einem der beiden Punkte wird als Stützvektor gewählt.
Die Differenz der Ortsvektoren zu den beiden Punkten liefert einen Richtungsvektor.

Gleichung der Geraden durch die Punkte A(5;8;-3) und B(4;-3;-9)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4-5 \\ -3-8 \\ -9+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2: Die Gerade g verläuft durch den Punkt A und parallel zu einer Geraden h.
Der Ortsvektor zum Punkt A wird Stützvektor.
Da die Gerade h parallel zur Geraden g verläuft, müssen ihre Richtungsvektoren kollinear sein, also kann man den Richtungsvektor der Geraden h übernehmen.

Die Gerade g verläuft durch den Punkt A(2;1;-3) und parallel zur Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

2.2 Ebenengleichungen

Um die Lage einer Ebene im dreidimensionalen Raum festzulegen, benötigt man drei Vektoren, einen Stützvektor und zwei nicht kollineare Richtungsvektoren.
Der *Stützvektor* $\vec{p}$ führt vom Koordinatenursprung in die Ebene.
Die *Richtungsvektoren* $\vec{u}$ und $\vec{v}$ spannen die Ebene auf, werden daher auch *Spannvektoren* genannt.

Gleichung: $E:\vec{x}=\vec{p}+r\vec{u}+s\vec{v},\quad r,s\in\mathbb{R}$ (*Ebenengleichung in Parameterform)*

Aufstellen einer Ebenengleichung

Beispiel 1: Es sind drei Punkte A, B und C der Ebene bekannt, die aber nicht alle auf einer Geraden liegen dürfen.
Der Ortsvektor zu einem der drei Punkte wird als Stützvektor gewählt.
Die Differenz der Ortsvektoren z. B. zu den Punkten A und B bzw. A und C liefert zwei (nicht kollineare) Spannvektoren.

Stellen Sie die Gleichung der Ebene auf, in der die drei Punkte A(6;-1;4), B(5;4;0) und C (3;-1;-5) liegen.

$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5-6\\4-(-1)\\0-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3-6\\-1-(-1)\\-5-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\5\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\0\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\5\\-4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$$

Beispiel 2: Wie lautet die Gleichung der Ebene E_2, die durch den Punkt A(2;1;4) geht und parallel zu der Ebene $E_1:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ verläuft?

$$E_2:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$$

Der Ortsvektor zum Punkt A wird als Stützvektor der Ebene E_2 gewählt. Da die Ebene E_2 parallel zur Ebene E_1 verlaufen soll, spannen deren Richtungsvektoren auch die Ebene E_2 auf.

3. Inzidenzprobleme

3.1 Punkt auf Gerade oder Ebene

Ein Punkt A liegt auf einer Geraden g : $\vec{x} = \vec{u} + s \cdot \vec{v}, s \in R$, wenn sich der Ortsvektor $\vec{a}$ zum Punkt A als Linearkombination aus dem Stützvektor $\vec{u}$ und dem Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden g darstellen lässt.

Beispiel: A(3;-4,5;3,5) g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es muss also eine reelle Zahl r geben, die die Gleichung $\vec{a} = \vec{u} + r\vec{v}$ erfüllt.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -4{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Vektorgleichung liefert ein System von drei Koordinatengleichungen.

I. $6 = 4r$
II. $-4{,}5 = -3r$
III. $1{,}5 = r$

Aus einer dieser Gleichungen, hier bietet sich III. an, wird r berechnet und anschließend dieser Wert in die beiden anderen Gleichungen eingesetzt.

I. $6 = 4 \cdot 1{,}5$ w. A.
II. $-4{,}5 = -3 \cdot 1{,}5$ w. A.

r = 1,5 erfüllt auch die anderen Gleichungen; somit liegt der Punkt A auf der Geraden g.

Ein Punkt B liegt in der Ebene E : $\vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}, \quad r, s \in R$, wenn es reelle Zahlen k und l gibt, die die Ebenengleichung erfüllen.

Beispiel: B(5;2;6) und E : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Wenn B auf E liegt, muss die folgende Vektorgleichung eine Lösung haben.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Diese Vektorgleichung ergibt ein System von drei Koordinatengleichungen.

I. $3 = 3k$
II. $1 = 2k + 4l$
III. $2 = -k - 2l$

Aus zwei dieser Gleichungen, etwa I. und III., berechnet man k und l.

Aus I. ergibt sich $k = 1$.
Aus III. ergibt sich mit $2 = -1 - 2l$ der Wert $l = -\frac{3}{2}$.

Diese Werte werden in die Gleichung II. eingesetzt.

$1 = 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-\frac{3}{2})$ f. A.

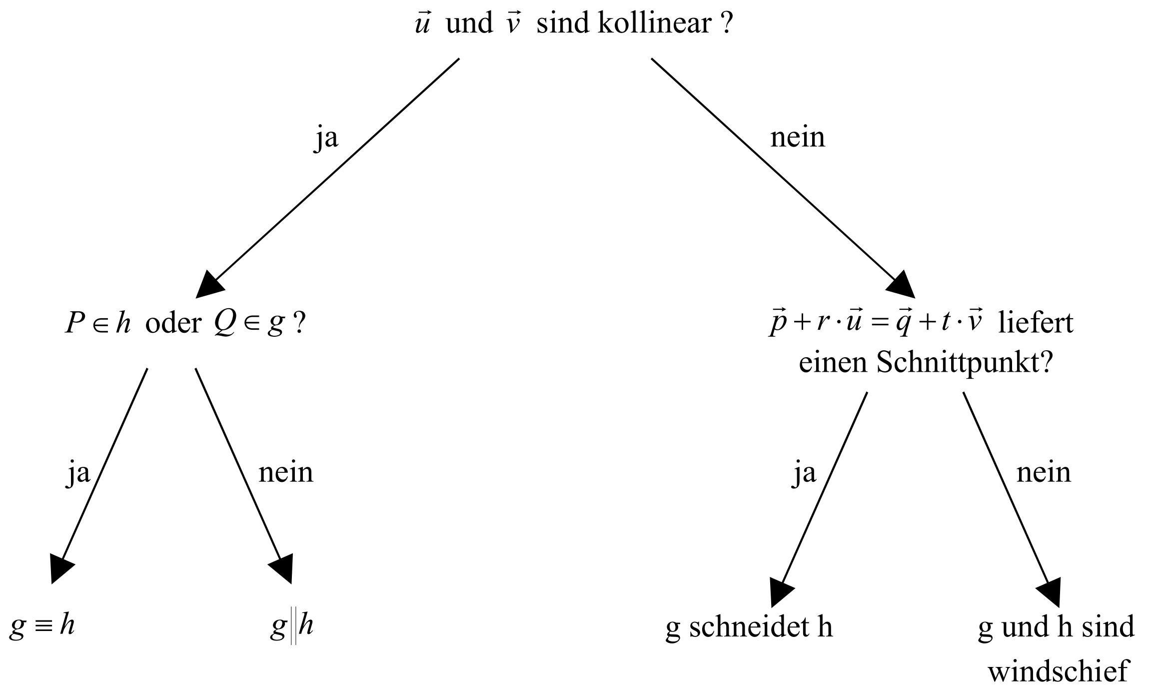
Das Wertepaar $k = 1$ und $l = -\frac{3}{2}$ erfüllt die Gleichung II. nicht und somit auch nicht die Vektorgleichung.
Der Punkt B liegt also nicht in der Ebene E.

3.2 Lage zweier Geraden

Gegeben sind in einem dreidimensionalen Raum die beiden Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$ mit $r, t \in R$.
Die vier verschiedenen Fälle der Lagebeziehungen von Geraden finden Sie in der Tabelle im Buch auf S. 62.

Um die Lagebeziehung zweier Geraden zu ermitteln, lösen Sie entweder grundsätzlich die Gleichung $\vec{p} + r \cdot \vec{u} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$ und entscheiden nach dem Satz und den Beispielen *im Buch auf S. 63*, oder Sie gehen folgendermaßen vor.

Prüfungsschema:



Beispiel 1: Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Offensichtlich sind die Richtungsvektoren kollinear, denn $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Als nächstes wird geprüft, ob der Punkt Q(1;4;0) auf der Geraden g liegt. (Vgl. 3.1)

Die Gleichung $\begin{pmatrix} 1-2 \\ 4-8 \\ 0-0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ wird von keiner reellen Zahl s erfüllt.

Die Geraden g und h sind somit parallel, aber nicht identisch.

Beispiel 2: Gegeben sind die Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\4\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Die beiden Richtungsvektoren sind offensichtlich nicht kollinear, die Geraden haben somit einen Schnittpunkt oder sind windschief.

Wir nehmen an, es gäbe einen Schnittpunkt S. Dann muss es zwei reelle Zahlen s und m geben, die die folgende Gleichung erfüllen.

$$\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\\-1\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}-s\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$$

Diese Vektorgleichung liefert ein System von drei Koordinatengleichungen zur Bestimmung von s und m.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I.} & -3 & = & 2m - s \\
\text{II.} & -2 & = & m \\
\text{III.} & 1 & = & -2m + 3s
\end{array}$$

Aus zwei dieser Gleichungen, etwa I. und II., bestimmt man die Werte von s und m.

II. $m = -2$
I. $s = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$

Durch Einsetzen prüft man, ob dieses Wertepaar auch die Gleichung III. erfüllt.

III. $1 = -2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) = 4 - 1$ w. A.

Das berechnete Wertepaar erfüllt alle drei Koordinatengleichungen und somit auch die obige Vektorgleichung.

Deshalb gibt es einen Schnittpunkt. Sein Ortsvektor lässt sich aus der Gleichung der Geraden g mit $s = -1$ oder aus der Gleichung der Geraden h mit $m = -2$ berechnen.

$$\vec{s}=\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$$

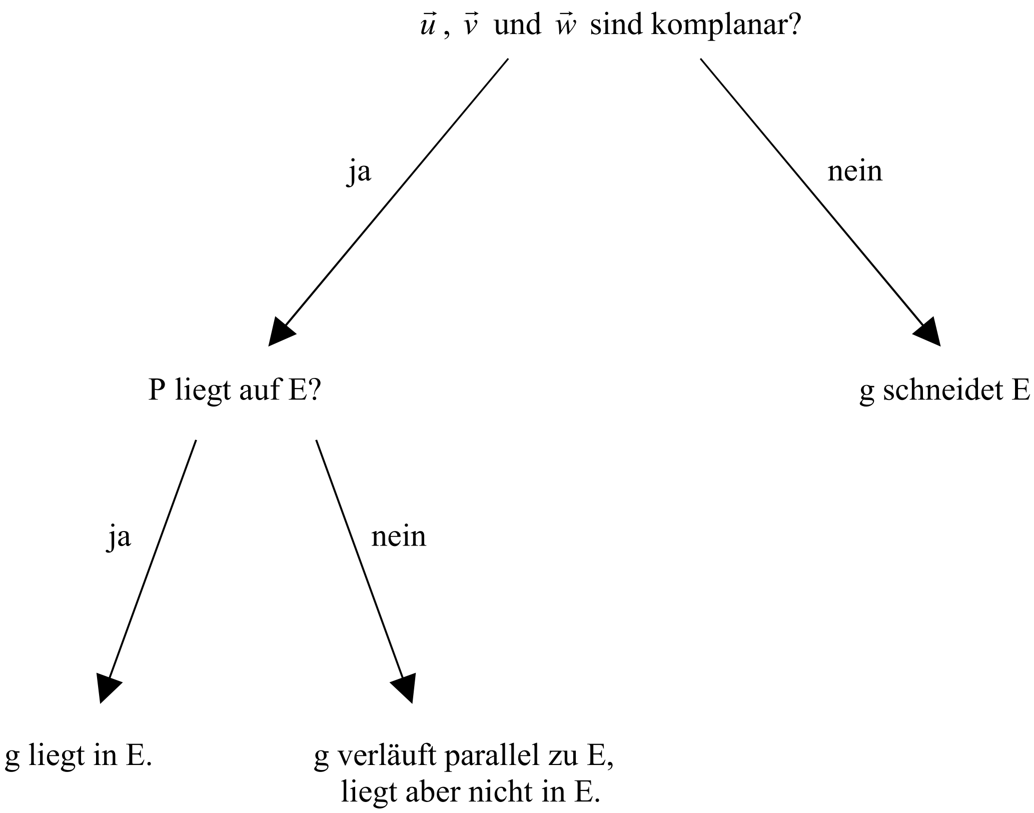
Die beiden Geraden g und h schneiden sich im Punkt S(4;2;3).

3.3 Lage Gerade - Ebene

Gegeben sind in einem dreidimensionalen Raum die Gerade $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$ und die Ebene $E: \vec{x} = \vec{q} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$ mit $r, s, t \in R$.
Die drei verschiedenen Fälle der gegenseitigen Lage von Gerade und Ebene finden Sie in der Tabelle im Buch auf S. 74.

Um die Lagebeziehung zwischen der Geraden und der Ebene zu ermitteln, lösen Sie entweder grundsätzlich die Gleichung $\vec{p} + t \cdot \vec{u} = \vec{q} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$ und entscheiden nach dem Satz und den Beispielen *im Buch auf S. 74, 75*, oder Sie gehen folgendermaßen vor.

Prüfungsschema:



Beispiel 1: Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ und die Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Untersuchung der Richtungsvektoren auf Komplanarität:

$$\begin{array}{lrl} \text{I.} & 0 = & -4m - 4n \\ \text{II.} & -6 = & 6m \\ \text{III.} & 6 = & \phantom{-4m - {}} 6n \end{array}$$

Aus Gleichung II. folgt $m = -1$, aus Gleichung III. folgt $n = 1$.
Setzt man diese Werte in die Gleichung I. ein, $0 = -4 \cdot (-1) - 4 \cdot 1$, so ergib sich eine wahre Aussage, die Richtungsvektoren sind also komplanar.

Die Gerade g verläuft somit parallel zur Ebene E.

Als nächstes ist zu prüfen, ob sie sogar in der Ebene liegt. Dazu prüft man, ob der Aufpunkt P (0;6;0) in der Ebene E liegt.

$$\begin{array}{lrlll} \text{I.} & 0 = & 4 - 4j - 4k & & \\ \text{II.} & 6 = & \phantom{4 -{}} 6j & \Rightarrow & j = 1 \\ \text{III.} & 0 = & \phantom{4 - 4j -{}} 6k & \Rightarrow & k = 0 \end{array}$$

j und k in Gleichung I. einsetzen:

$$0 = 4 - 4 \cdot 1 - 4 \cdot 0 = 0 \qquad \text{w. A.}$$

Die Gerade g liegt somit in der Ebene E.

Beispiel 2: Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und die Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Untersuchung der Richtungsvektoren auf Komplanarität:

$$\begin{array}{lrlll} \text{I.} & 1 = & 4m - n & & \\ \text{II.} & -2 = & \phantom{4m -{}} 2n & \Rightarrow & n = -1 \\ \text{III.} & -5 = & 6m + n & & \end{array}$$

$n = -1$ in Gleichung I. einsetzten:

$$1 = 4m + 1 \quad \Rightarrow \quad m = 0$$

$n = -1$ und $m = 0$ in Gleichung III. einsetzen:

$$-5 = 0 - 1 = -1 \qquad \text{f. A.}$$

n = − 1 und m = 0 erfüllen die dritte Gleichung nicht.

Die Richtungsvektoren sind somit nicht komplanar, die Gerade schneidet also die Ebene.

Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes:
Die rechten Seiten der Geraden- und der Ebenengleichung werden gleichgesetzt.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + j\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese Vektorgleichung liefert ein System von drei Koordinatengleichungen zur Bestimmung der reellen Zahlen h, j und k.

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 1 = 4j - k - h \\ \text{II.} & 2 = 2k + 2h \\ \text{III.} & 5 = 6j + k + 5h \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I.}' & 3 = 12j - 3k - 3h \\ \text{III.}' & 10 = 12j + 2k + 10h \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{III.}' - \text{I.}': & \text{IV.} & 7 = 5k + 13h \\ \text{II.} : 2 \cdot 5: & \text{V.} & 5 = 5k + 5h \end{array}$$

$$\text{IV} - \text{V}: \quad \text{VI.} \quad 2 = 8h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{4}$$

Dieser Wert für h wird in die Geradengleichung eingesetzt.

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{4} \\ 5\frac{1}{2} \\ 1\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

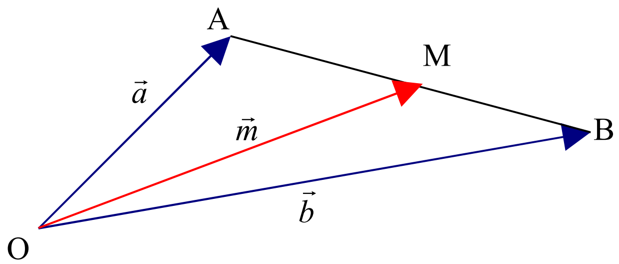
Der Schnittpunkt der Geraden g und der Ebene E hat also die Koordinaten $S(2\frac{1}{4}, 5\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4})$.

Statt den Wert für h in die Geradengleichung einzusetzen, kann man ebenso gut j und k aus dem Gleichungssystem berechnen und in die Ebenengleichung einsetzen. Dieses führt zum gleichen Ergebnis, ist aber aufwändiger zu rechnen.

4. Verschiedenes

4.1 Mittelpunkt einer Strecke

Der Punkt M halbiert die Strecke $\overline{AB}$.



Es gilt: $\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

Halbierungspunkt einer Strecke

$$\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

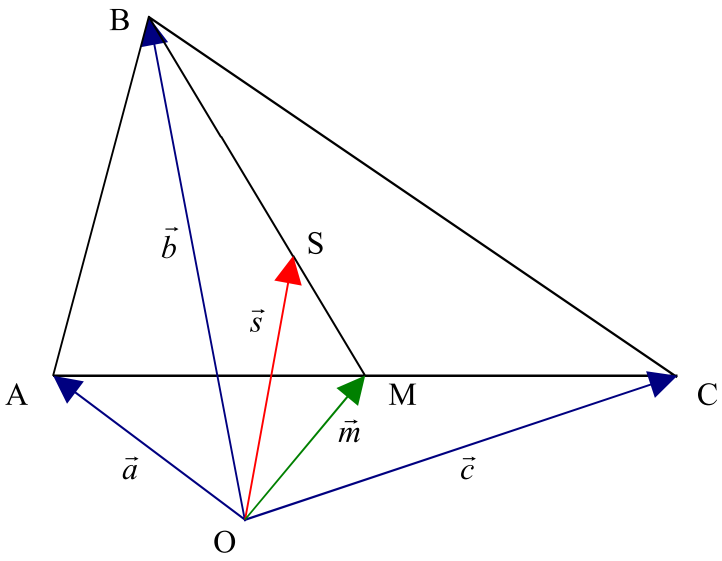
Beispiel: Berechne den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ mit A(4;−2;5) und B(9;12;−2).

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4+9 \\ -2+12 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ hat die Koordinaten M($6\frac{1}{2}$;5;$1\frac{1}{2}$).

4.2 Schwerpunkt eines Dreiecks

Der Schwerpunk eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. Diese werden vom Schwerpunkt im Verhältnis 2 : 1 geteilt.



Der Schwerpunkt S teilt die Strecke $\overline{BM}$ im Verhältnis 2 : 1.

Somit gilt: $\vec{s} = \vec{b} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \vec{b} + \frac{2}{3}(\vec{m} - \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{m} + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})\right) + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{b}$

> Schwerpunkt eines Dreiecks
>
> $$\vec{s} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$$

Beispiel: Berechne den Schwerpunkt des Dreiecks ABC mit A(2;−3;4), B(6;4;9), C(4;8;2).

$$\vec{s} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Schwerpunkt hat die Koordinaten S(4;3;5).

4.3 Gleichungen spezieller Geraden und Ebenen

Gleichungen der Koordinatenachsen

Als Aufpunkt wählt man üblicherweise den Koordinatenursprung.

x_1 – Achse: $x_1 : \vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

x_2 – Achse: $x_2 : \vec{x} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

x_3 – Achse: $x_3 : \vec{x} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gleichungen der Koordinatenebenen:

Auch hier legt man den Aufpunkt in den Koordinatenursprung.

x_1x_2 – Ebene: $E : \vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

x_1x_3 – Ebene: $E : \vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

x_2x_3 – Ebene: $E : \vec{x} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$