ANALYSIS

1. Untersuchung ganzrationaler Funktionen

1.1 Symmetrie

1. Beispiel: $f(x) = 7x^3 + 5x$

In der Funktionsgleichung treten nur ungerade Hochzahlen auf, also liegt eine Symmetrie zum Koordinatenursprung vor.

Nachweis: $f(-x) = -f(x)$

$7 \cdot (-x)^3 + 5 \cdot (-x) = -7x^3 - 5x = -(7x^3 + 5x)$

2. Beispiel: $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 5$

In der Funktionsgleichung treten nur gerade Hochzahlen auf, also liegt eine Symmetrie zur Hochachse vor.

Nachweis: $f(-x) = f(x)$

$4(-x)^4 - 3(-x)^2 + 5 = 4x^4 - 3x^2 + 5$

3. Beispiel: $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 9$

Es ist keine Symmetrie des Graphen erkennbar, da gerade und ungerade Hochzahlen auftreten.

1.2 Ableitung

$$f(x) = k\,x^n \qquad f'(x) = n\,k\,x^{n-1}$$

Beispiel: $f(x) = 3x^5 - 7x^3 + x^2 - 6 = 3x^5 - 7x^3 + x^2 - 6x^0$

$f'(x) = 5 \cdot 3x^{5-1} - 3 \cdot 7x^{3-1} + 2 \cdot x^{2-1} - 0 \cdot 6x^{0-1} = 15x^4 - 21x^2 + 2x$

Mit der Ableitungsfunktion lässt sich an jeder Stelle des Graphen die Steigung des Graphen berechnen.

1.3 Berechnung der Nullstellen

Nullstellen sind Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$.

1. Beispiel (Ausklammern): $f(x) = 5x^3 - 7x^2 = x^2(5x - 7)$

$$x^2(5x-7) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \vee \quad 5x - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = \tfrac{7}{5}$$

2. Beispiel (Lösungsformel): $f(x) = x^2 - 3x - 18$

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$x_{1,2} = \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4} + 18}$$

$$x_{1,2} = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{9}{2}$$

$$x_1 = -3 \quad , \quad x_2 = 6$$

3. Beispiel (Substitution): $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$

$$z := x^2$$

$$z^2 - 6z + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2 \vee z = 4$$

$$z = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\sqrt{2}\ , x_2 = +\sqrt{2}$$

$$z = 4 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -2\ , x_4 = +2$$

4. Beispiel (Raten): $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

Mögliche Nullstellen müssen Teiler des absoluten Gliedes (Summand ohne x) sein, hier also $-12, -6, -4, -3, \ldots, +6, +12$.
(Das Verfahren funktioniert nur, wenn das absolute Glied ganzzahlig ist.)
Durch Einsetzen stellt man fest, dass z. B. $x = 2$ eine Lösung ist ($f(2) = 0$).
Durch Polynomdivision wird der Grad der Funktion reduziert.

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 - 4x + 12):(x - 2) = x^2 - x - 6 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
\quad\ -x^2 - 4x \\
\quad \underline{-(-x^2 + 2x)} \\
\qquad\quad -6x + 12 \\
\qquad\ \underline{-(-6x + 12)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

In diesem Fall ergibt sich eine Gleichung 2. Grades, die sich nach Beispiel 2 bearbeiten lässt und hier die weiteren Lösungen -2 und 3 liefert.

1.4 Funktionsuntersuchung I

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, $\quad x \in \mathbb{R}$

a) Symmetrie
Ein Symmetrieverhalten des Graphen ist nicht erkennbar.

b) Ableitungen

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f''(x) = 6x - 4$

$f'''(x) = 6$

c) Achsenschnittpunkte

$f(x_0) = 0$

$x_0(x_0{}^2 - 2x_0 + 1) = 0$

$x_{01} = 0$ $\qquad$ $S_{x1}(0;0)$

$x_{02,3} = 1 \pm \sqrt{1-1}$

$x_{02,3} = 0$

doppelte Nullstelle $\qquad$ $S_{x2}(1;0)$

d) Extrempunkte

$f'(x_E) = 0$

$x_E{}^2 - \frac{4}{3}x_E + \frac{1}{3} = 0$

$x_{E1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{3}{9}}$

$x_{E1,2} = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}$

$x_{E1} = \frac{1}{3}$, $x_{E2} = 1$

Überprüfung:
Es muss gelten: $f''(x_E) \neq 0$

$f''(\frac{1}{3}) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 4 = -2 < 0$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 2 > 0$

Berechnung der Funktionswerte:

$f(\frac{1}{3}) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$ $\qquad$ $H\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{27}\right)$

$f(1) = 0 \quad s.\ o.$ $\qquad$ $T(1;0)$

e) Wendepunkte

$f''(x_W) = 0$

$6x_W - 4 = 0$

$x_W = \frac{2}{3}$

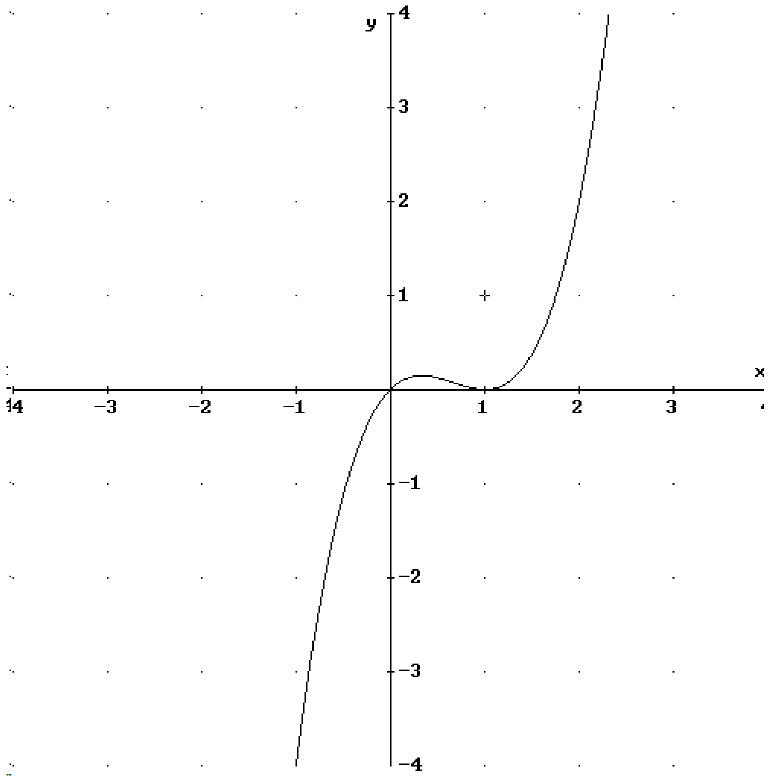
Überprüfung:

$f'''(x_W) = 6 \neq 0$

Berechnung des Funktionswertes:

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$ $\qquad W\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{27}\right)$

f) graphische Darstellung



1.5 Funktionsuntersuchung II

$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x$, x $\in \mathbb{R}$

a) Symmetrie

Der Graph verläuft symmetrisch zum Koordinatenursprung.

Nachweis: $f(-x) = \frac{1}{9}(-x)^3 - 3\cdot(-x) = -\frac{1}{9}x^3 + 3x = -(\frac{1}{9}x^3 - 3x) = -f(x)$

b) Ableitungen

$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$

$f''(x) = \frac{2}{3}x$

$f'''(x) = \frac{2}{3}$

c) Achsenschnittpunkte

$f(x_0) = 0$

$x_0(\frac{1}{9}x_0{}^2 - 3) = 0$

$x_0 = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{9}x_0{}^2 = 3$

$x_0 = 0 \quad \vee \quad x_0 = -3\sqrt{3} \quad \vee \quad x_0 = 3\sqrt{3}$

$S_{x1}(-3\sqrt{3};0) \quad S_{x2}(0;0) \quad S_{x3}(3\sqrt{3};0)$

d) Extrempunkte

$f'(x_E) = 0$

$\frac{1}{3}x_E{}^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_E{}^2 = 9$

$x_{E1} = -3 \qquad x_{E2} = +3$

Überprüfung:

Es muss gelten: $f''(x_E) \neq 0$

$f''(3) = \frac{2}{3}\cdot 3 = 2 > 0$

Berechnung des Funktionswertes:

$f(3) = \frac{1}{9}\cdot 3^3 - 3\cdot 3 = -6$ T(+3;−6)

Wegen der Symmetrie des Graphen zum Koordinatenursprung muss ein Hochpunkt sein. H(−3;+6)

e) Wendepunkte

$f''(x_W) = 0$

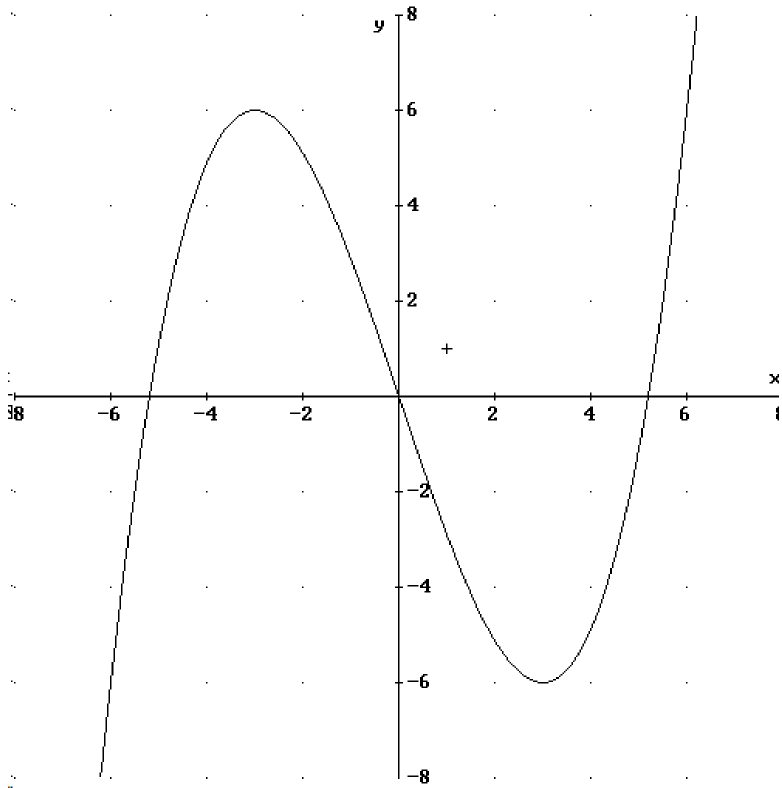
$\frac{2}{3} x_W = 0$

$x_W = 0$

Überprüfung:

$f'''(x_W) = \frac{2}{3} \neq 0$ ✓ W(0;0)

f) graphische Darstellung



2. Bestimmung ganzrationaler Funktionen

2.1 Verfahren

- Ansetzen einer Funktion f
  Berechnen der 1. und 2. Ableitung
- Bedingungen am Graphen in Funktionsbedingungen "übersetzen"
- Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems
- Prüfen, ob wirklich eine Lösung der Aufgabe vorliegt

2.2 Ansetzen einer Funktion

Beispiele:

- Der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades ... .
  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

- Eine ganzrationale Funktion vierten Grades, deren Graph symmetrisch zur Hochachse ist,
  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

- Eine ganzrationale Funktion fünften Grades, deren Graph symmetrisch zum Koordinatenursprung verläuft, ...
  $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$

Entsprechend der Anzahl der benötigten Parameter *a, b, c,* ... müssen der Aufgabenstellung Bedingungen an den Graphen entnommen werden, die zum Aufstellen eines Gleichungssystems zur Berechnung der Parameter benötigt werden.

2.3 Formulieren der Bedingungen

- Der Graph verläuft durch den Punkt A(2 ; −5).

  A(2 ; −5) ist Punkt des Graphen: $f(2) = -5$

- Der Punkt T(−1; 6) ist ein Tiefpunkt.

  T(−1; 6) ist Punkt des Graphen: $f(-1) = 6$
  $x_E = -1$ ist Extremstelle: $f'(-1) = 0$

- Der Punkt W(3 ; −4) ist ein Wendepunkt.

  W(3 ; −4) ist Punkt des Graphen: $f(3) = -4$
  $x_W = 3$ ist Wendestelle: $f''(3) = 0$

- S(2 ; 7) ist ein Sattelpunkt.

  S(2 ; 7) ist Punkt des Graphen: $f(2) = 7$
  Der Graph hat in $x_S = 2$ eine waagerechte Tangente: $f'(2) = 0$
  $x_S = 2$ ist Wendestelle: $f''(2) = 0$

- Die Tangente an der Stelle x = 1 an den Graphen hat die Steigung −3:
  $f'(1) = -3$

  Der Graph hat an der Stelle x = −3 eine Tangente parallel zur x-Achse:
  $f'(-3) = 0$

2.4 Beispiel I

Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat im Koordinatenursprung einen Hochpunkt. 2 ist Wendestelle, die Wendetangente dort hat die Steigung 4.

Ansatz:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Aufzustellen ist ein System aus vier Gleichungen zur Bestimmung der Parameter a, b, c und d.

I. H(0 ; 0) ist Graphenpunkt: $f(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0$

II. $x_E = 0$ ist Extremstelle: $f'(0) = 3a \cdot 0 + 2b \cdot 0 + c = 0$

III. $x_W = 2$ ist Wendestelle: $f''(2) = 6a \cdot 2 + 2b = 0$

IV. Für $x_W = 2$ ist $m = 4$: $f'(2) = 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 4$

Es ergibt sich folgendes System.

I. $d = 0$
II. $c = 0$
III. $12a + 2b = 0$
IV. $12a + 4b = 4$

Es ergibt sich: $b = 2$, $a = -\frac{1}{3}$.

Eine mögliche Lösung ist $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$.

Zu überprüfen ist, ob H(0 ; 0) tatsächlich ein Hochpunkt ist.

$$f'(x) = -x^2 + 4x$$
$$f''(x) = -2x + 4$$
$$f''(0) = 4 > 0$$

Die zweite Ableitung zeigt, dass der Graph der bestimmten Funktion im Koordinatenursprung keinen Hochpunkt, sondern einen Tiefpunkt hat.

Es lässt sich somit keine Funktion bestimmen, die die vorgegebenen Bedingungen erfüllt.
(Die Aufgabe hat also keine Lösung.)

2.5 Beispiel II

4. Integralrechnung

4.1 Stammfunktion, unbestimmtes Integral

Eine Funktion F heißt Stammfunktion einer Funktion f, wenn

$$F'(x) = f(x)$$

gilt.

Ist $f(x) = x^n$, so ist $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ eine Stammfunktion von f.

f heißt Randfunktion.

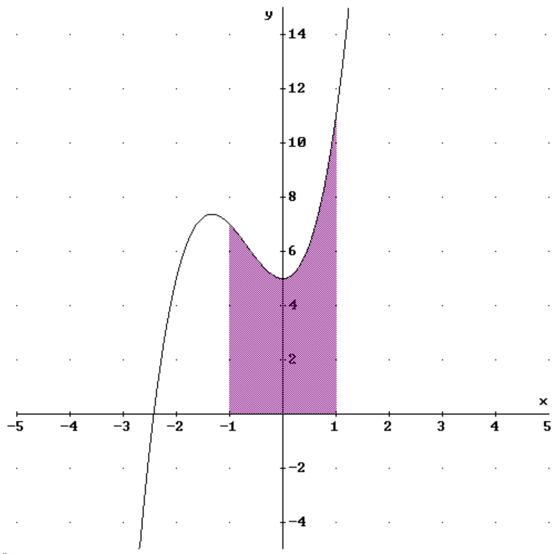
Man schreibt auch $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + const$ (unbestimmtes Integral).

Die Stammfunktion gibt die "Wirkung" der Randfunktion an.

4.2 Das bestimmte Integral

- Randfunktion oberhalb der Rechtsachse

  Beispiel: $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5$



$$\int_{-1}^{1} (2x^3 + 4x^2 + 5)dx =$$

$$\left[\tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{4}{3}x^3 + 5x\right]_{-1}^{1} =$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\cdot 1^4 + \tfrac{4}{3}\cdot 1^3 + 5\cdot 1\right) - \left(\tfrac{1}{2}\cdot(-1)^4 + \tfrac{4}{3}\cdot(-1)^3 + 5\cdot(-1)\right) =$$

$$12\tfrac{2}{3}$$

Der Wert des Integrals ist positiv.

- Randfunktion unterhalb der Rechtsachse

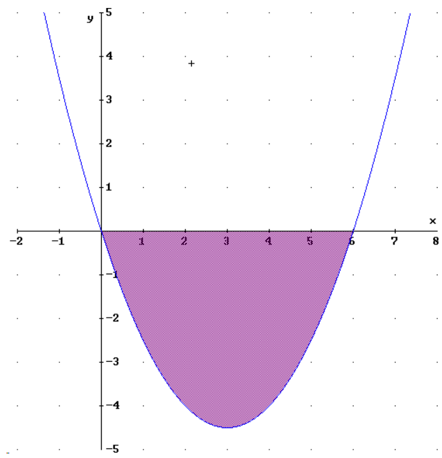
Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x = \frac{1}{2}x(x-6)$

$$\int_0^6 \left(\tfrac{1}{2}x^2 - 3x\right)dx =$$

$$\left[\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2\right]_0^6 =$$

$$(36 - 54) - 0 =$$

$$-18$$



Der Wert des Integrals ist negativ.

- Randfunktion oberhalb und unterhalb der Rechtsachse

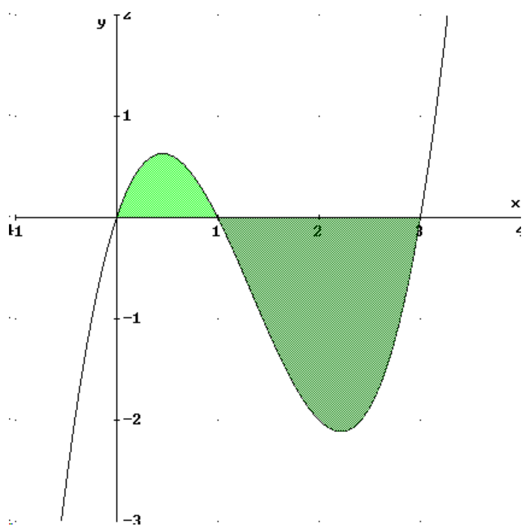
Beispiel: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$

$$\int_0^3 \left(x^3 - 4x^2 + 3x\right)dx =$$

$$\left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2\right]_0^3 =$$

$$\left(\tfrac{81}{4} - 36 + \tfrac{27}{2}\right) - 0 =$$

$$-2\tfrac{1}{4}$$



Die Schnittstelle des Graphen mit der Rechtsachse bei x* = 1 wird hier nicht berücksichtigt.

Das kann durchaus sinnvoll sein: Nehmen Sie z. B. die Rechtsachse als Zeitachse [Jahre] und die Hochachse als Bilanzachse [Zehntausend Euro]. Die positive Bilanz des ersten Jahres wird in den nachfolgenden beiden Jahren geschluckt und zu einer negativen Bilanz von 22500 € aufgebaut.

Sie können natürlich für jedes Jahr die Bilanz aufstellen:

1. Jahr: $\int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{5}{12}$ (ca. + 4167 €)

2. Jahr: $\int_1^2 f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_1^2 = -1\frac{1}{12}$ (ca. − 10833 €)

3. Jahr: $\int_2^3 f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_2^3 = -1\frac{7}{12}$ (ca. − 15833 €)

Lautet die Aufgabe, den Flächeninhalt zu bestimmen, den der Graph mit der Rechtsachse einschließt, gehen Sie folgendermaßen vor.

$$A = \left|\int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx\right| + \left|\int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx\right| =$$

$$\left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x^2\right]_1^3\right| =$$

$$\left|\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 3 - 0\right| + \left|\frac{81}{4} - 36 + 27 - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 3\right)\right| =$$

$$\left|\frac{5}{12}\right| + \left|-\frac{8}{3}\right| =$$

$$3\frac{1}{12}$$

4.3 Berechnung von Flächeninhalten

Will man mit der Integralrechnung Flächeninhalte berechnen, ist folgendes zu beachten:
Berechnet wird immer die Größe der Fläche, die die Randfunktion mit der Rechtsachse und Parallelen zur Hochachse (an den angegebenen Grenzen) einschließt.
Verläuft der Graph oberhalb der Rechtsachse, ist der Wert des Integrals positiv, verläuft er unterhalb, ist der Wert negativ. (Vgl. Kap. 4.2)

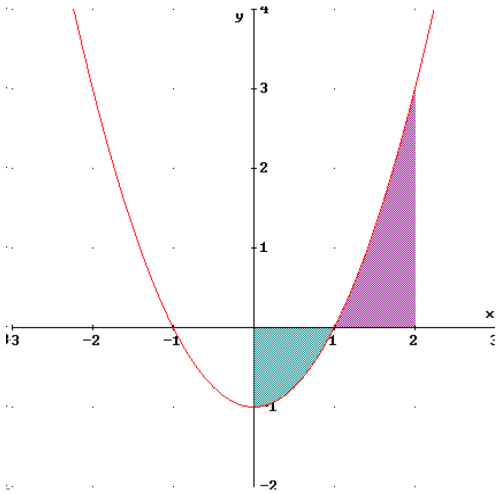
Grundsätzlich ist also zu untersuchen, ob der Graph in dem zu betrachtenden Intervall Nullstellen aufweist. (Vgl. Auch letztes Beispiel von Kap. 4.2.)

- Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph der Funktion $f(x) = x^2 - 1$ zwischen 0 und 2 mit der x- Achse einschließt.

  a) Berechnung der Nullstellen

  $x_0^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = -1 \vee x_0 = 1$

  Relevant ist hier die Nullstelle bei 1.



  b) Berechnung des Flächeninhalts

  $$A = \left|\int_0^1 (x^2 - 1)dx\right| + \left|\int_1^2 (x^2 - 1)dx\right| =$$

  $$\left|\left[\tfrac{1}{3}x^3 - x\right]_0^1\right| + \left|\left[\tfrac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2\right| =$$

  $$\left|\tfrac{1}{3} - 1 - 0\right| + \left|\tfrac{8}{3} - 2 - (\tfrac{1}{3} - 1)\right| =$$

  $$\left|-\tfrac{2}{3}\right| + \left|\tfrac{4}{3}\right| =$$

  $$2$$

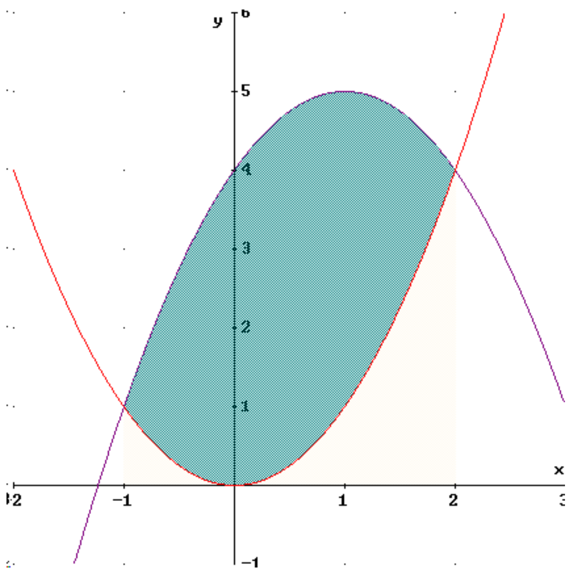
- Berechnen Sie den Inhalt der Fläche den die Graphen der Funktionen f und g mit den Gleichungen $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x^2 + 2x + 4$ mit einander einschließen.

  a) Berechnung der Schnittstellen

  $$x_s^2 = -x_s^2 + 2x_s + 4$$

  $$2x_s^2 - 2x_s - 4 = 0$$

  $$x_{s1} = -1 \quad x_{s2} = 2$$



  b) Berechnung des Flächeninhalts

  $$A = \left|\int_{-1}^2 \left(f(x) - g(x)\right)dx\right| =$$

  $$\left|\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4)dx\right| =$$

  $$\left|\left[\tfrac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x\right]_{-1}^2\right| =$$

  $$\left|\tfrac{16}{3} - 4 - 8 - (-\tfrac{2}{3} - 1 + 4)\right| =$$

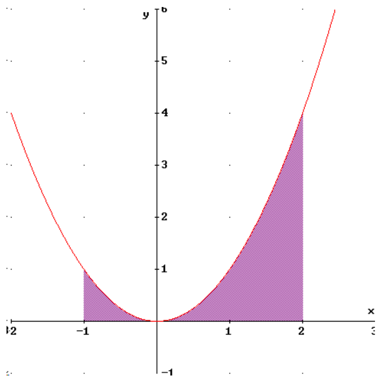
  $$\left|-9\right| =$$

  $$9$$

  Bei dieser Rechnung geschieht folgendes:

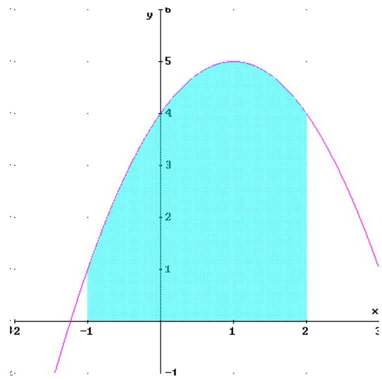
Von dem Flächeninhalt, den G_f mit der x-Achse einschließt, nämlich

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = 3$$



wird der Flächeninhalt, den G_g mit der x-Achse einschließt, nämlich

$$\int_{-1}^{2} (-x^2 + 2x + 4) dx = 12$$

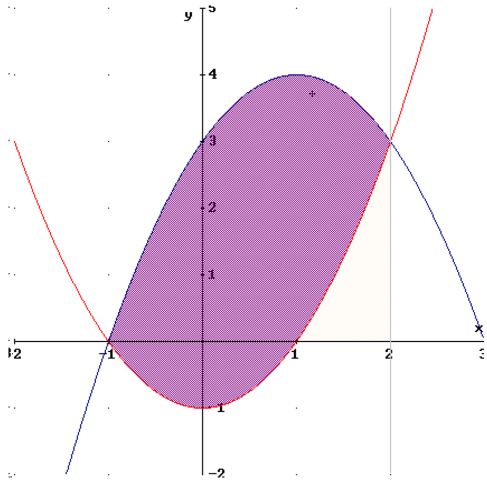


subtrahiert, also 3 − 12 = −9.

Aus welchem Grund die Differenz negativ wird, verdeutlichen die Zeichnungen.
Hätte man über $g(x) - f(x)$ integriert, wäre die Differenz natürlich positiv gewesen.

- Das vorherige Beispiel wird verändert, beide Graphen werden um 1 parallel zur Hochachse nach unten verschoben:

$$f(x) = x^2 - 1$$
$$g(x) = -x^2 + 2x + 3$$



An der Größe der eingeschlossenen Fläche ändert sich nichts, wie man leicht nachrechnen kann:

$$A = \left| \int_{-1}^{2} \left((x^2 - 1) - (-x^2 + 2x + 3) \right) dx \right| =$$
$$\left| \int_{-1}^{2} (2x^2 - 2x - 4) dx \right|$$

Der Ausdruck ist oben bereits gelöst!
Weshalb gibt es aber hier keine Probleme, obwohl doch G_f im Integrationsbereich die Rechtsachse schneidet?

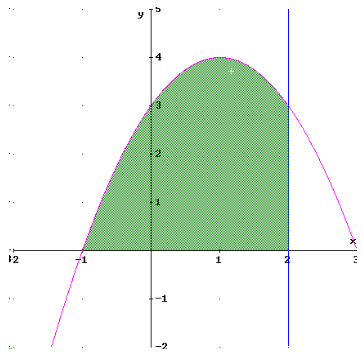
Das Integral über der Funktion g hat folgenden Wert:

$$\int_{-1}^{2} \left(-x^2 + 2x + 3\right)dx =$$

$$\left[-\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_{-1}^{2} =$$

$$-\tfrac{8}{3} + 4 + 6 - \left(\tfrac{1}{3} + 1 - 3\right) =$$

$$9$$



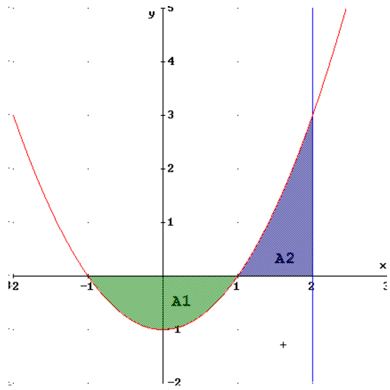
Das Integral über der Funktion f hat folgenden Wert:

$$\int_{-1}^{2} \left(x^2 - 1\right)dx =$$

$$\left[\tfrac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{2} =$$

$$\tfrac{8}{3} - 2 - \left(-\tfrac{1}{3} + 1\right) =$$

$$0$$



Der Wert von A1 ist negativ, der von A2 positiv.

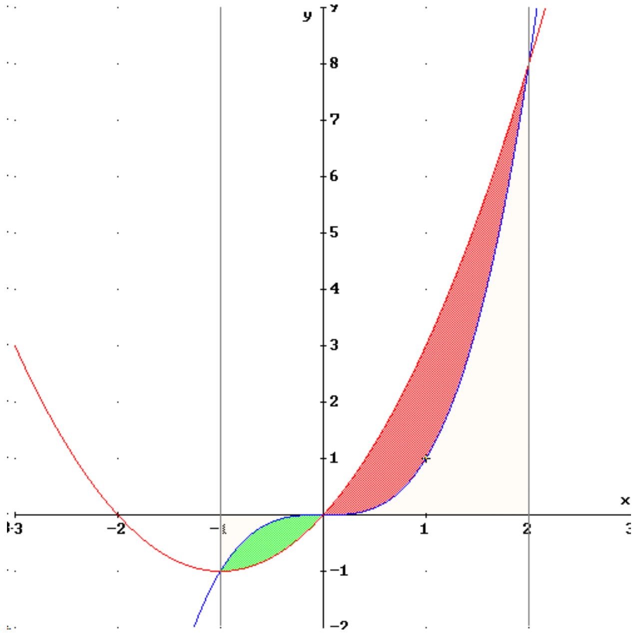
Berechnet man nun das Integral $\int_{-1}^{2}\left(g(x) - f(x)\right)dx$, wird von dem Flächeninhalt, den G_g mit der Rechtsachse einschließt, zum einen der (positive) Wert A2 subtrahiert. So soll es auch sein!
Zum anderen wird der negative Wert A1 subtrahiert, also der Betrag von A1 addiert. Genau das brauchen wir auch!

Man kann also zwischen zwei Schnittstellen integrieren, ohne sich über den Verlauf der Graphen Gedanken machen zu müssen.

Anders verhält es sich, wenn der Flächeninhalt über Schnittstellen hinweg bestimmt werden soll. Siehe nachfolgendes Beispiel!

- Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, den die Graphen der Funktionen f und g miteinander einschließen.

$$f(x) = x^3$$
$$g(x) = x^2 + 2x$$



a) Berechnung der Schnittstellen

$$x_s^3 = x_s^2 + 2x_s$$
$$x_s\left(x_s^2 - x_s - 2\right) = 0$$
$$x_{S1} = 0$$
$$x_{S2,3} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + 2}$$
$$x_{S2} = -1 \quad x_{S3} = 2$$

b) Berechnung des Flächeninhalts

$$A = \left|\int_{-1}^{0} \left(f(x) - g(x)\right)dx\right| + \left|\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx\right| =$$
$$\left|\left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{0}^{2}\right| =$$
$$\left|0 - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - 1\right)\right| + \left|4 - \tfrac{8}{3} - 4 - 0\right| =$$
$$\left|\tfrac{5}{12}\right| + \left|-\tfrac{8}{3}\right| =$$
$$3\tfrac{1}{12}$$

Durchdenken Sie an diesem Beispiel noch einmal, weshalb der Wert des ersten Integrals positiv und der des zweiten negativ ist, obwohl doch das grüne Flächenstück unterhalb und das rote oberhalb der x-Achse liegt.

4.4 Umkehraufgaben

1. Aufgabentyp: Berechnen Sie k : $\int_{-1}^{1}(-x^3+k)dx = 4$

$$\int_{-1}^{1}(-x^3+k)dx = \left[-\tfrac{1}{4}x^4+kx\right]_{-1}^{1} = -\tfrac{1}{4}+k-\left(-\tfrac{1}{4}-k\right)$$

$$2k = 4$$

$$k = 2$$

2. Aufgabentyp: Berechnen Sie k: $\int_{-1}^{k}(x^2-2)dx = -1\tfrac{2}{3}$

$$\int_{-1}^{k}(x^2-2)dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3-2x\right]_{-1}^{k} = \tfrac{1}{3}k^3-2k-\left(-\tfrac{1}{3}+2\right)$$

$$\tfrac{1}{3}k^3-2k-1\tfrac{2}{3} = -1\tfrac{2}{3}$$

$$k\left(\tfrac{1}{3}k^2-2\right) = 0$$

$$k = -\sqrt{6} \vee k = 0 \vee k = \sqrt{6}$$

5. Exponentialfunktionen

5.1 Exponentielle Prozesse

Exponentielle Wachstums- und Zerfallsprozesse $f(t) = a \cdot e^{kt}$

a - Bestand zur Zeit $t = 0$

$k > 0$: Wachstumskonstante

$k < 0$: Zerfallskonstante

Beispiel: Bestimmung einer Wachstumsfunktion

Der Holzbestand eines Waldstückes wird alle fünf Jahre gezählt.

$\frac{t}{\text{Jahre}}$	$\frac{\text{Holzbest.}}{\text{Festmeter}}$	$\frac{f(t+5)}{f(t)}$
0	3500	
		1,1029
5	3860	
		1,1062
10	4270	
		1,1030
15	4710	
		1,1040
20	5200	
		1,1058
25	5750	

Der Mittelwert der Quotienten ist $c = 1{,}1044$.

Wachstumsfunktion (t*: alle 5 Jahre gemessen) $\ln b^a = a \cdot \ln b$

$$\begin{aligned} f(t^*) &= 3500 \cdot 1{,}1044^{t^*} \\ &= 3500 \cdot e^{\ln 1{,}1044^{t^*}} \\ &= 3500 \cdot e^{0{,}0993 t^*} \end{aligned}$$

$$f(t) = 3500 \cdot e^{\frac{0{,}0993}{5} \cdot t} = 3500 \cdot e^{0{,}0199 \cdot t}$$

$k = 0{,}0199$ ist der Wachstumsfaktor.

Nach welcher Zeit hat sich der Bestand verdoppelt?

$$f(t_{Doppel}) = 3500 \cdot e^{0{,}0199 \cdot t_{Doppel}} = 7000$$
$$e^{0{,}0199 \cdot t_{Doppel}} = 2 \quad / \ln$$
$$0{,}0199 \cdot t_{Doppel} = \ln 2$$
$$t_{Doppel} \approx 34{,}8$$

$$\ln \tfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$$
$$\ln \tfrac{1}{b} = -\ln b$$
$$\ln 1 = 0$$

Nach etwa 35 Jahren hat sich der Holzbestand - unverändertes Wachstum vorausgesetzt - verdoppelt.

Durch Ungezieferbefall verringert sich der Holzbestand eines Waldes jährlich um etwa 2,7 %.

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) \cdot (1 - 0{,}023)^t \\ &= f(0) \cdot 0{,}973^t \\ &= f(0) \cdot e^{-0{,}02737 \cdot t} \end{aligned}$$

Nach welcher Zeit ist ein Viertel des Holzbestandes verloren gegangen?
(Auszurechnen ist, nach welcher Zeit noch drei Viertel des Bestandes vorhanden sind.)

$$f(t_{ges.}) = f(0) \cdot e^{-0{,}02737 \cdot t_{ges.}} = \tfrac{3}{4} \cdot f(0)$$
$$e^{-0{,}02737 \cdot t_{ges.}} = 0{,}75$$
$$-0{,}02737 \cdot t_{ges..} = \ln 0{,}75$$
$$t_{ges.} \approx 10{,}5$$

Nach etwa $10\tfrac{1}{2}$ Jahren ist ein Viertel des Bestandes verloren.

5.2 Funktionsuntersuchungen

a) Symmetrie

- Der Graph verläuft symmetrisch zur Hochachse, wenn $f(-x) = f(x)$ gilt.

  Beispiel:
  $$f(x) = e^{x} + e^{-x}$$
  $$f(-x) = e^{-x} + e^{-(-x)} = e^{-x} + e^{x} = f(x)$$

- Der Graph verläuft symmetrisch zum Koordinatenursprung, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt

  Beispiel:
  $$f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$$
  $$f(-x) = 2 \cdot (-x) \cdot e^{(-x)^2} = -2x \cdot e^{x^2} = -f(x)$$

b) Ableitungen

- $$f(x) = e^{x}$$
  $$f'(x) = e^{x}$$

- $$f(x) = e^{-x}$$
  $$f'(x) = -e^{-x}$$

- $$f(x) = e^{x^2+3x}$$
  $$f'(x) = (2x+3)e^{x^2+3x}$$

- $$f(x) = 2x^2 \cdot e^{x}$$
  $$f'(x) = 4x \cdot e^{x} + 2x^2 \cdot e^{x} = (4x + 2x^2) \cdot e^{x}$$

- $$f(x) = 2x \cdot e^{1-x}$$
  $$f'(x) = 2 \cdot e^{1-x} - 2x \cdot e^{1-x} = (2-2x)e^{1-x}$$

c) Berechnung von Nullstellen

- $e^x - 3 = 0$
  $e^x = 3$
  $x = \ln 3$

- $2x \cdot e^x = 0$
  $2x = 0 \quad oder \quad e^x = 0$
  $2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
  $e^x > 0 \quad \forall\ x \in R$

- $e^{\frac{1}{2}x} + e^{-x} > 0 \quad ,denn$
  $e^{\frac{1}{2}x} > 0 \quad \forall \quad x \in R \quad und \quad e^{-x} > 0 \quad \forall \quad x \in R$

- $e^{\frac{1}{2}x} - e^x = 0$
  $e^{\frac{1}{2}x} = e^x \quad / \ln$
  $\frac{1}{2}x = x$
  $x = 0$

- $\frac{1}{2}e^{-x} - e^x = 0$
  $\frac{1}{2}e^{-x} = e^x$
  $e^{-x} = 2e^x$
  $-x = (\ln 2) + x$
  $-2x = \ln 2$
  $x = -\frac{1}{2}\ln 2$

- $x \cdot e^{-2x} + 2 = 0$
  $x \cdot e^{-2x} = -2$
  Die Nullstelle lässt sich nicht direkt berechnen.