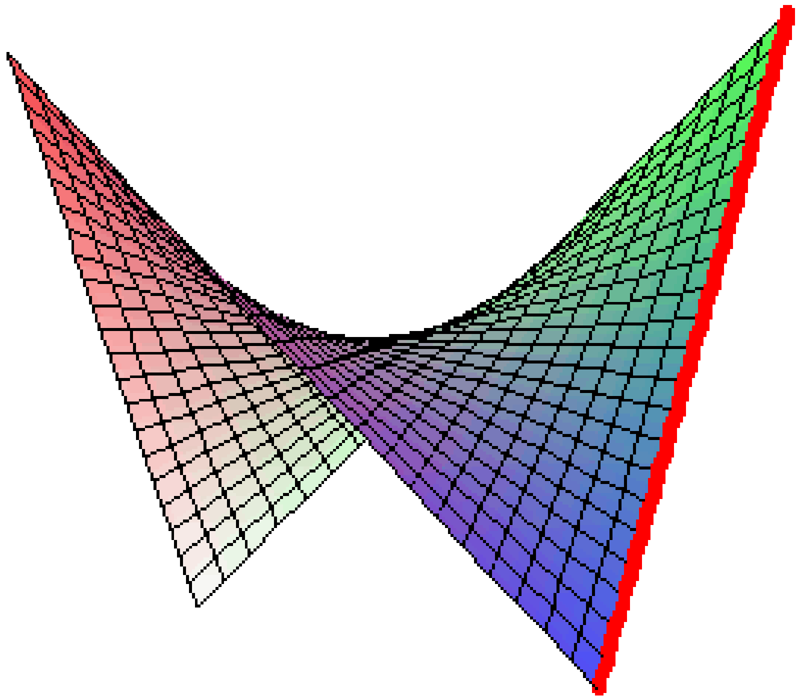
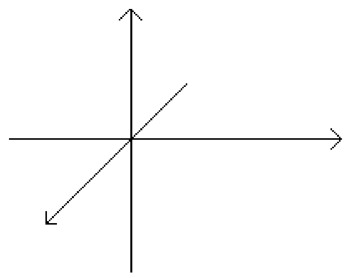
Analytische Geometrie

Lexikon zur Klausur- und Abiturvorbereitung

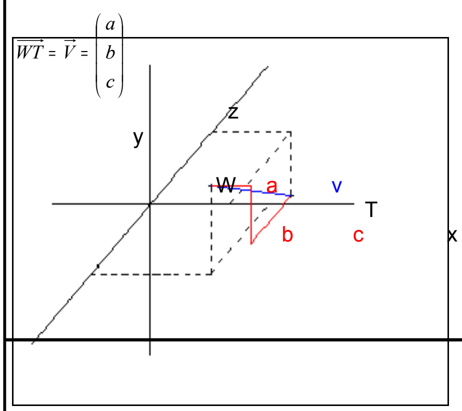


Projekt des Mathe LKs 2006/2007:
Fabian Feddern
Kortine Kleinheinz
Simon Landsberg
Lennart Mou
Jan Overbeck
Katharina Schellhaus
Friederike Thun
Christopher Westphal

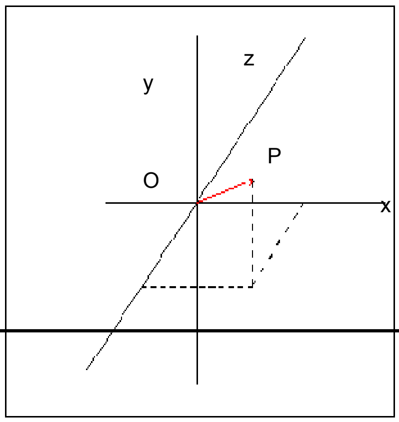
1 Euro



Ein ***Rechtssystem*** ist ein System aus drei räumlichen → ***Vektoren*** , die von einem einzigen Ursprung ausgehen. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit dieser untereinander bilden sie ein System, in dem sich räumlich bewegt werden kann.



Ein ***Vektor*** ist in allgemeinster Form ein Element eines → ***Vektorraums***, also ein Objekt, das mit seinesgleichen addiert werden kann und mit Zahlen (=Elementen des zugrunde liegenden Körpers) multipliziert werden kann.
In der Geometrie ist ein Vektor auffassbar als eine Klasse von Pfeilen gleicher Länge (Betrag), gleicher Richtung und gleicher Orientierung.
Vektoren haben normalerweise keinen fixen Ausgangspunkt. Ein Vektor kann daher als die Menge aller "Pfeile", die ***kollinear*** (d.h. parallel sind, also die gleiche Richtung besitzen), gleich lang und gleich orientiert sind, angesehen werden. Sie dienen im Allgemeinen dazu, eine Richtung anzuzeigen.
Im Unterschied dazu haben gebundene Vektoren einen Ursprung (Ausgangspunkt). Sie können zum Beispiel, als so genannte → ***Ortsvektoren***, die Position eines Punktes im Raum angeben.
Ein Vektor mit gleichem Betrag, gleicher Richtung aber entgegengesetzter Orientierung eines anderen Vektors ist dessen ***Gegenvektor***.

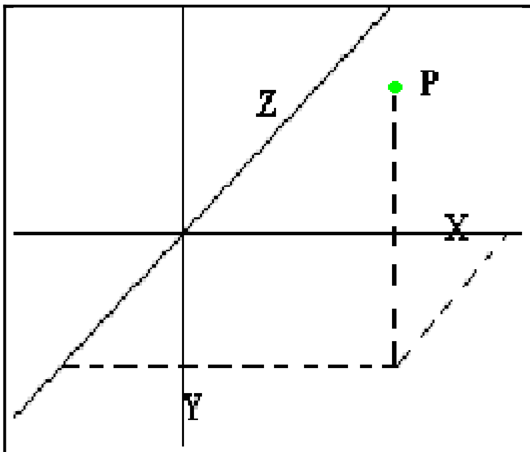


Ein **Ortsvektor** $\vec{P}$ ist ein gebundener Vektor, durch den die Position (Lage, Ort) eines Punktes *P* im Raum festgelegt wird. Um einen Ortsvektor angeben zu können, muss ein eindeutiger Bezugspunkt definiert sein, der den Ursprung *O* eines Koordinatensystems festlegt. Es gilt $\vec{P} = \overrightarrow{OP}$.

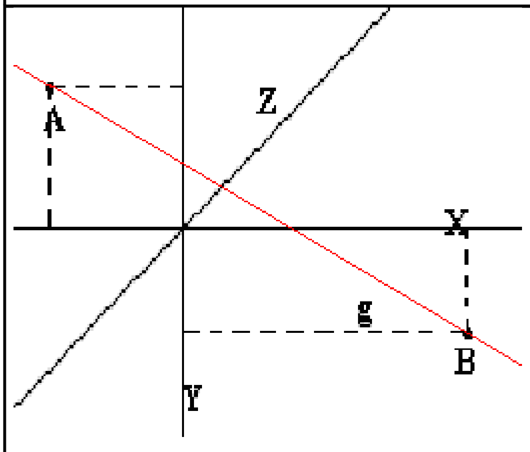
$$\vec{V_1} * \vec{V_2} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = a_1 * a_2 + b_1 * b_2 + c_1 * c_2$$

Das ***Skalarprodukt*** ordnet jeweils zwei → ***Vektoren*** $\vec{A}$ und $\vec{B}$ eine reelle Zahl zu.
Im R³ ergibt sich aus dem Skalarprodukt $\vec{A} * \vec{A}$ der Betrag des Vektors $\vec{A}$.
Zwei Vektoren stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt Null ist; zeigen sie hingegen in dieselbe Richtung, so ist das Skalarprodukt das (gewöhnliche) Produkt ihrer Längen.

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \vec{c}$	Das ***Kreuzprodukt*** (auch Vektorprodukt) zweier → ***Vektoren*** in einem dreidimensionalen → ***Vektorraum*** ist ein Vektor, der senkrecht auf der von den beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht. Die Länge dieses Vektors entspricht der Fläche des Parallelogramms mit den Seiten die dem Betrag (dazu siehe → ***Einheitsvektor***) der beiden Vektoren entspricht. Es gibt zwei solche Vektoren, die in entgegengesetzte Richtung weisen. Davon wird einer ausgewählt, sodass die Vektoren mit dem Vektor ihres Kreuzprodukts ein → ***Rechtssystem*** bilden.
$\vec{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\quad \lvert\vec{V}\rvert = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $\vec{V_0} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{pmatrix}$	In der linearen Algebra ist ein ***Einheitsvektor*** ein → ***Vektor*** mit der Länge Eins. Man kann jeden Vektor zu einem Einheitsvektor machen, indem man ihn normiert, das heißt alle Koordinaten durch den ***Betrag*** (→ ***Skalarprodukt*** des Vektors mit sich selbst) des Vektors teilt.
	Ein ***Vektorraum*** ist eine mathematische Struktur und stellt das fundamentale Konzept der Linearen Algebra dar. Vektorräume werden in fast allen Zweigen der Mathematik verwendet. Ein Vektorraum besteht aus einzelnen → ***Vektoren***, die addiert oder mit einer skalaren Zahl multipliziert werden können, so dass das Ergebnis jeweils wieder ein Vektor desselben Vektorraums ist (siehe → ***Skalarprodukt***). Da die skalaren Zahlen, mit denen man einen Vektor multiplizieren kann, einem Körper entstammen, ist ein Vektorraum immer ein Vektorraum „über“ einem bestimmten Körper. Man spricht beispielsweise von einem Vektorraum über den reellen Zahlen.
Punktnormalenform einer Ebene: $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} = 0$ $\lvert\vec{n}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}\right\rvert = 17$ HNF derselben Ebene: $\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{61}{17} = 0$ Abstand Ursprung-Ebene: $d = \frac{61}{17}$	Die **Hessesche Normalform (HNF)** (nach Otto Hesse) ist in der analytischen Geometrie eine Gleichung, die eine Ebene im R^3 oder eine Gerade im R^2 beschreibt: Wenn $\vec{x}$ in einem gegebenen Koordinatensystem der Ortsvektor eines Punktes *P* der Ebene *E* ist (kurz: $P \in E$), dann gilt $\vec{n_0} * \vec{x} = d$ Dabei ist $\vec{n_0}$ der normierte Normalenvektor (siehe → ***Einheitsvektor***) von *E* und *d > 0* der Abstand der Ebene vom Ursprung des Koordinatensystems. Die sich hieraus ergebende Gleichung $\vec{n_0} * \vec{x} - d = 0$ ist die Hessesche Normalenform.



Ein **Punkt** im R^3 wird durch die X- ,Y- und Z-Koordinaten beschrieben.
P(X/Y/Z)

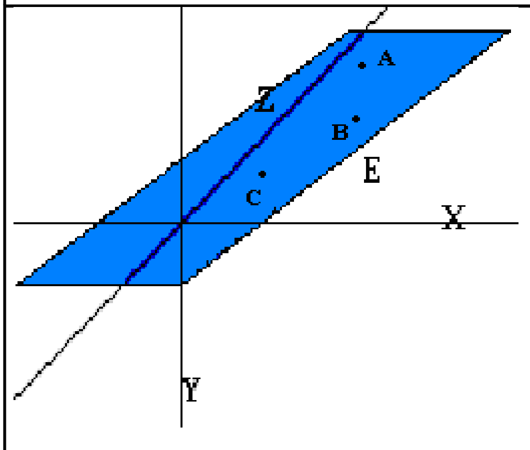


Ein **Gerade** wird durch im R^3 zwei Punkte A und B beschrieben.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

In einem R^2 wird eine **Gerade** durch ihre Steigung und dem Schnittpunkt der Y-Achse beschrieben
y = m*x+c
oder durch einen senkrechten Vektor $\vec{n}$

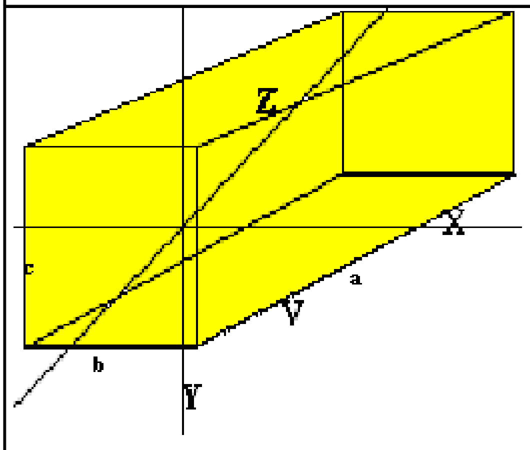
$$0 = \vec{n} * \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right]$$



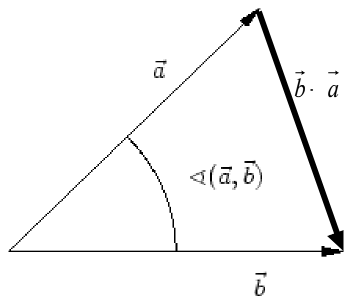
Eine **Ebene** wird in einem R^3 durch drei Punkte (A, B, C) oder zwei Geraden oder einer Geraden und einem Punkt oder einem senkrechten Vektor beschrieben.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} + s* \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{(n_1{}^2 + n_2{}^2 + n_3{}^2)}} * \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \vec{x} + \frac{(\vec{n} * \vec{g})}{\sqrt{(n_1{}^2 + n_2{}^2 +{}_n 3^2)}}$$



Das Volumen eines **Spates** wird im R^3 durch
$V = |(\vec{a} \times \vec{b})* \vec{c}\,|$
Ermittelt, wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Vektoren der Grundfläche sind und $\vec{c}$ die Höhe ist.

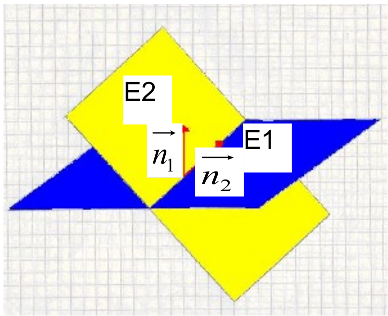


Winkel zwischen 2 Vektoren

Der Winkel $180^\circ - \alpha$ zwischen zwei Vektoren wird über den Kosinussatz berechnet. Aus $(\vec b - \vec a)^2 = \vec a^2 + \vec b^2 - 2|\vec a| \cdot |\vec b| \cos\alpha$ folgt: $\frac{\vec a * \vec b}{|\vec a| * |\vec b|} = \cos\alpha$.

<u>Beispiel:</u>

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec a \qquad \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \vec b \qquad \cos\alpha = \frac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec a| \cdot |\vec b|} = \frac{42}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{146}} \approx 0.45 \Rightarrow \alpha = 63.09^\circ$$



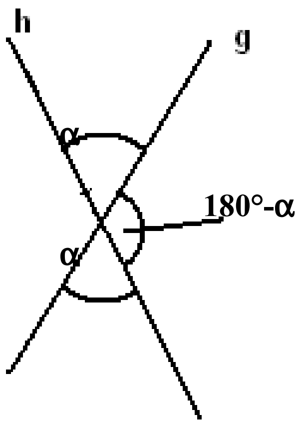
Schnittwinkel zweier Ebenen

Der Schnittwinkel zweier Ebenen ist gleich dem Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren der Ebenen. Auch hier verwendet man den umgestellten Kosinussatz, der wie folgt lautet: $\frac{|\vec a * \vec b|}{|\vec a| * |\vec b|} = \cos\alpha$, $\vec a$ und $\vec b$ sind hierbei die Normalenvektoren der Ebenen.

Hier ist es wichtig wie die Vektoren orientiert sind, deshalb rechnet man mit Betragsstrichen im Zähler, um zu vermeiden, dass man den falschen (d.h. den größeren) Schnittwinkel errechnet.

<u>Beispiel:</u>

$$\vec n_{E1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec n_{E2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad \cos\alpha = \frac{|\vec a \cdot \vec b|}{|\vec a| \cdot |\vec b|} = \frac{62}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{289}} \approx 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 12{,}9^\circ$$



Winkel zwischen zwei Geraden:

Schneiden sich zwei Geraden g und h, so entstehen vier Winkel, je zwei der Größe α und zwei der Größe 180°-α . Unter dem Schnittwinkel versteht man den, der kleiner oder gleich 90° ist, also α .

Aus den Richtungsvektoren $\vec u$ und $\vec v$ der Geraden g und h ergibt sich für den Schnittwinkel:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec u * \vec v|}{|\vec u| * |\vec v|}$$

Da der Schnittwinkel zwischen den Geraden auch der größere sein kann, man aber den kleineren berechnen möchte, setzt man das Skalaprodukt in Betragsstriche, dadurch wird der kleinere berechnet.

Beispielaufgabe:

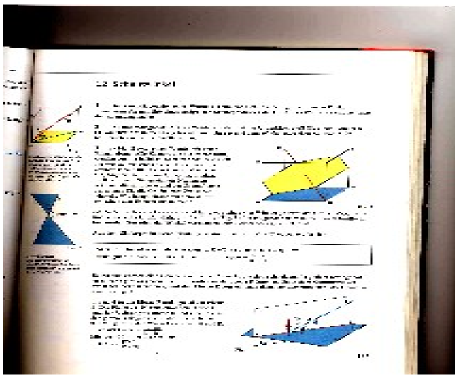
Berechne den Schnittwinkel der zwei Geraden:

$$g: \vec x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad h: \vec x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1+0+9} * \sqrt{1+1+9}} = \frac{|1-9|}{\sqrt{10} * \sqrt{11}}$$

α=40,29°

(Ohne Betragsstriche hätte man den Winkel 180°-40,29°=139,71° berechnet.)



Winkel zwischen einer Gerade und einer Ebene:
Schneiden sich die Gerade g und die Ebene E, aber nicht im rechten Winkel, so gibt es genau eine Ebene F, die senkrecht zur Ebene E ist und g enthält.
Die Gerade g bildet dann mit dem Normalenvektor n von E, der in F enthalten ist, den Winkel 90°-α , wobei α der gesuchte Schnittwinkel zwischen g und E ist.

$$\text{Cos}(90°-\alpha)=\frac{\left|\vec{u}*\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|*\left|\vec{n}\right|}$$

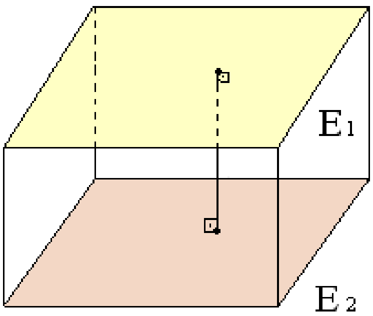
$$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha \qquad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{\left|\vec{u}*\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|*\left|\vec{n}\right|}$$

Beispielaufgabe:
Berechne den Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der Ebene E:

$g:\vec{x}=t\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}$ E: 5x+y+z=22 Ein Normalenvektor von E ist: $\vec{n}=s\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\sin\alpha=\frac{\left|\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{26}*\sqrt{27}}=\frac{22}{\sqrt{26}*\sqrt{27}} \qquad \alpha = 56{,}13°$$

Schnittpunkt P: 5*(4t)+(3t)-t=22 22t=22 t=1 P(4/3/-1)

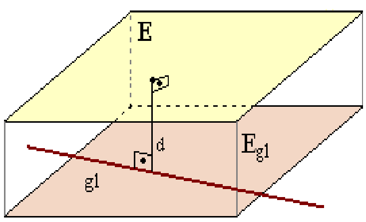


1. Ebene – Ebene
Voraussetzungen: E1 || E2 ; E1 und E2 in HNF

Liegen beide Ebenen auf der selben Seite des Ursprungs (Vorzeichen der markierten Terme gleich) den Betrag der Differenz, sonst den Betrag der Summe dieser Terme (den Abständen zum Ursprung) bilden.
Beispiel:

$$E_1=\frac{1}{\sqrt{34}}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-\frac{6}{\sqrt{34}}=0 \qquad E_2=\frac{1}{\sqrt{34}}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-\frac{8}{\sqrt{34}}=0$$

$$d=\left|-\frac{8}{\sqrt{34}}-\left(-\frac{6}{\sqrt{34}}\right)\right| \qquad d=\frac{2}{\sqrt{34}}$$



2. Ebene – Gerade
Voraussetzungen: E || g ; E in HNF, g in Parameterform

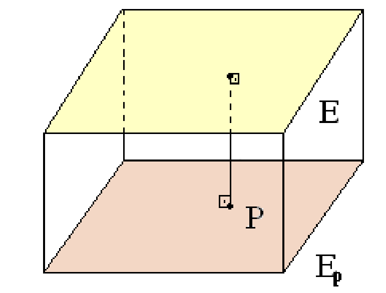
Mit dem Stützvektor der Geraden g und dem Normalenvektor der Ebene E eine Ebene Eg, die g enthält und parallel zu E ist, bilden.
Dann fortfahren wie in 1.
Beispiel:

$$E:\frac{1}{\sqrt{34}}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-\frac{6}{\sqrt{34}}=0 \qquad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

Eg in Normalenform: Eg in HNF:

$$E_g:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}=0 \qquad E_g:\frac{1}{\sqrt{34}}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{x}+\frac{41}{\sqrt{34}}=0$$

Weiter wie oben.



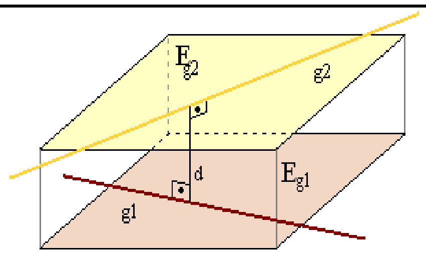
3. Ebene – Punkt

Voraussetzungen: E in HNF

Mit dem Ortsvektor des Punktes P und dem Normalenvektor der Ebene E eine Ebene Ep bilden, die P enthält und parallel zu ist. Dann wie in 2 die Normalenform und die HNF bilden und fortfahren wie in 1 oder P in die vereinfachte Formel einsetzen:

E in HNF (siehe 2.); P (1/2/3)

$$d = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{34}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{34}} \right|$$



4. Gerade – Gerade

Voraussetzungen: g1 und g2 in Parameterform, $\notin g1 \cap g2$

Mit den Richtungsvektoren von g1 und g2 einen Normalenvektor von g1 und g2 finden. Mit den Stützvektoren und dem neuen Normalenvektor zwei parallele Ebenen Eg1 und Eg2 bilden, die g1 bzw. g2 enthalten. Dann fortfahren wie in 1.

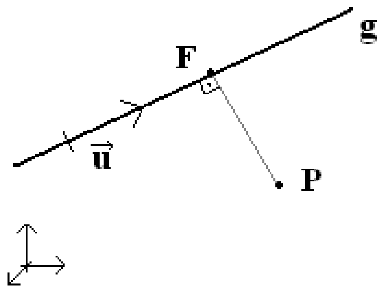
Beispiel:

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor mit dem Kreuzprodukt ermitteln.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fortfahren wie in 2 und 1.



5. Gerade – Punkt

Voraussetzung $F \in g$ in Parameterform

Für den kleinsten Abstand gehen wir davon aus, dass $\overrightarrow{PF} \perp \vec{u}$ und damit das Skalarprodukt Null ist.

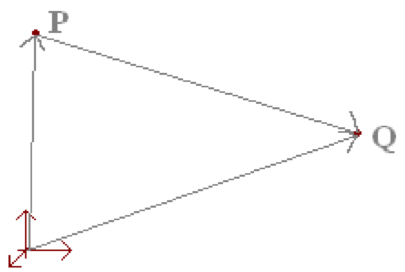
Daher lässt sich der Vektor $\overrightarrow{OF}$ berechnen:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

P(4/3/2);

$$\left\{ \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow r = 2 \rightarrow \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left| \overrightarrow{PF} \right| = \sqrt{56} = d$$



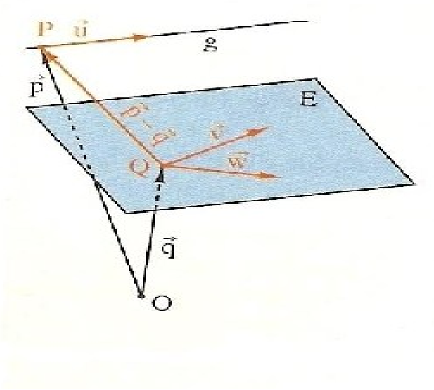
6. Punkt – Punkt

Die Punkte P(1/2/3) und Q(3/2/1) haben den Abstand, der sich aus dem Betrag der Differenz ihrer beiden Ortsvektoren errechnen lässt.

Beispiel:

$$\overrightarrow{OQ} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OP} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left| \overrightarrow{PQ} \right| = d = \sqrt{8}$$



Die Gerade g : $\vec{x} = \vec{p} + t * \vec{u}$ ist **parallel** zu der Ebene $E : \vec{x} = \vec{q} + r * \vec{v} + s * \vec{w}$ und liegt nicht in der Ebene, wenn die Gleichung $\vec{p} + t * \vec{u} = \vec{q} + r * \vec{v} + s * \vec{w}$ **keine Lösung** hat:;

1. Bedingung: Der Richtungsvektor $\vec{u}$ muss linear abhängig zu den Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sein

2. Bedingung: Die Differenz der beiden Stützvektoren $\vec{p} - \vec{q}$ muss linear unabhängig von denen der beiden Richtungsvektoren der Ebene $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sein

Beispiel 1):
Bestimmung einer Geraden die parallel zur Ebene ist und durch einen Punkt geht: Die Ebene ist durch die Punkte A (1/0/2), B (0/2/1) und C (1/3/0) festgelegt. Die Gerade geht durch den Punkt P (4/4/4). Daraus ergibt sich

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-0 \\ 1-2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1-1 \\ 3-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor und der Geraden g und die Spannvektoren müssen linear abhängig sein.

Als Richtungsvektor kann man einen der Spannvektoren nehmen, z.B. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist parallel zur Ebene

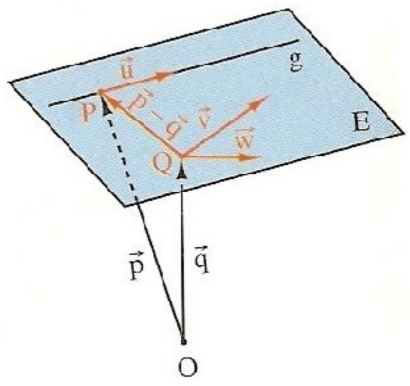
Beispiel 2): $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$;

Prüfen der beiden Bedingen?: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = a * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b * \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ a=1; b=0 linear abhängig;

$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = a * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b * \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig;

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3=1r+t Das LGS hat keine Lösung
4=2r+3s-2t
2=-r-2s+t



Die Gerade $g : \vec{x} = \vec{p} + t * \vec{u}$ **liegt in der Ebene** E: $\vec{x} = \vec{q} + r * \vec{v} + s * \vec{w}$, wenn die Gleichung $\vec{p} + t * \vec{u} = \vec{q} + r * \vec{v} + s * \vec{w}$ **unendlich viele Lösungen** hat:

1. Bedingung: Der Richtungsvektor $\vec{u}$ muss linear abhängig zu den Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sein

2. Bedingung: Die Differenz der beiden Stützvektoren $\vec{p} - \vec{q}$ muss linear abhängig von denen der beiden Richtungsvektoren der Ebene $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sein

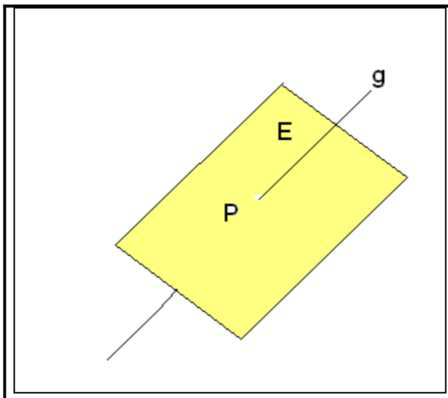
Beispiel:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Prüfen der beiden Bedingen: $\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = a * \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear abhängig ;

$\begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = a * \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b * \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear abhängig

9=5r+4s-9t
5=3r+2s-5t
3=1r+2s-3t
Das LGS hat unendlich viele Lösungen



Ebene - Gerade:
Durchstoßpunkt:
Parameterform:

E: $\vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u_1} + s * \vec{v_1}$ und g: $\vec{x} = \vec{p} + t * \vec{w}$

Die gerade g schneidet die Ebene E im Punkt P. Um diesen Schnittpunkt zu ermitteln muss man die Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzen und erhält eine Variable. Diese ergibt in die jeweilige Gleichung eingesetzt den Vektor zum Punkt P:

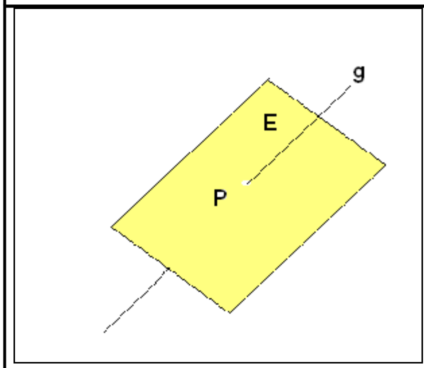
E$_1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{x}$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gleichsetzung im LGS:
I. 1+ 2 r- s= 2+ t ➔Gleichung III. mit 2 multipliziert und subtrahiert von
II. 1- s= 2 – t Gleichung I.
III.5+ r+3s= 1+ t

II -1 + s=2- t ➔ III subtrahiert von II.
III’. -9- 7s= -t

2=8+8s➔- 6=8s ➔s= -$\frac{4}{3}$, eingesetzt: t=-$\frac{1}{3}$; r=-$\frac{1}{3}$

t eingesetzt in g ergibt: P $\left(1\frac{1}{3} / 2\frac{1}{3} / \frac{2}{3}\right)$



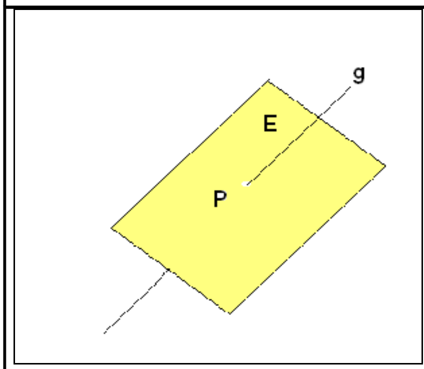
Ebene-Gerade:
Durchstoßpunkt:
Koordinatengleichung:

g: $\vec{x} = \vec{p} + t * \vec{w}$ E: $2x_1+5x_2-x_3=49$

Zur Bestimmung des Durchstoßpunktes muss die Geradengleichung in Koordinatenform gebracht werden:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ➔ x_1= 3 +2 t; x_2= 4+ t; x_3= 7- t

eingesetzt in Koordinatengleichung:
2*(3+2t)+5*(4+t)-(7-t)=49
➔10t +19=49, also t=3
eingesetzt in g ergibt Durchstoßpunkt P(9/7/4)



Ebene-Gerade:
Normalengleichung:

E$_1$: $(\vec{x} - \vec{p_1}) * \vec{n_1} = 0$ und g: $\vec{x} = \vec{p_2} + t * \vec{w}$

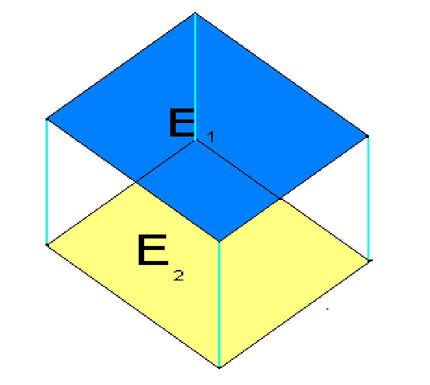
Die Geradengleichung wird in die Ebenengleichung eingesetzt und somit t ermittelt.

$(\vec{p_2} + t * \vec{w} - \vec{p_1}) * \vec{n_1} = 0$

E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ ➔ -6 t -2=0 ➔ t=-1/3

eingesetzt in g ergibt Durchstoßpunkt P $\left(1\frac{1}{3} / 2\frac{1}{3} / \frac{2}{3}\right)$



Ebenen parallel:
Normalengleichung:

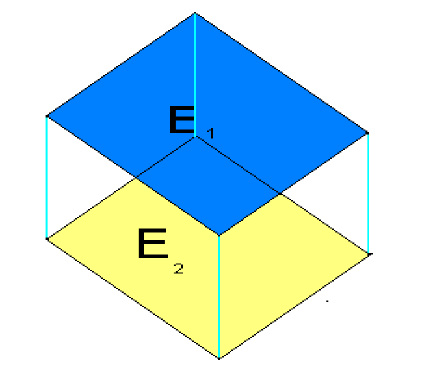
E_1: $(\vec{x}-\vec{p_1})*\vec{n_1}=0$ E_2: $(\vec{x}-\vec{p_2})*\vec{n_2}=0$

Bedingung: Die beiden Normalenvektoren sind linear abhängig: $r*\vec{n_1}=\vec{n_2}$

E_1: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\right]*\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=0$ und E_2: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\5\\6\end{pmatrix}\right]*\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}=0$

Rechnung:

$$2*\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$$



Ebenen Parallel:
Parametergleichung:

E_1: $\vec{x}=\vec{p}+r*\vec{u_1}+s*\vec{v_1}$ E_2: $\vec{x}=\vec{p}+r*\vec{u_2}+s*\vec{v_2}$

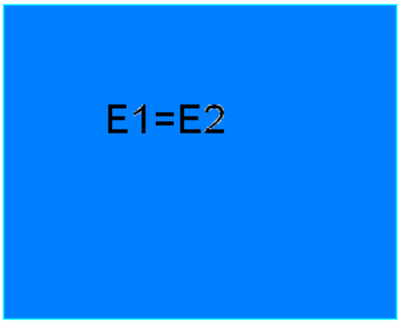
Bedingung: Die Beiden Richtungsvektoren von der Ebene E_1 sind linear abhängig von den Richtungsvektoren der Ebene E_2:

$r*\vec{u_1}+s*\vec{v_1}=\vec{u_2}$ und $r*\vec{u_1}+s*\vec{v_1}=\vec{v_2}$

E_1: $\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\vec{x}$ E_2: $\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}=\vec{x}$

Rechnung:

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$



Ebenen identisch:
Parametergleichungen:

E_1: $\vec{x}=\vec{p}+r*\vec{u_1}+s*\vec{v_1}$ E_2: $\vec{x}=\vec{p}+r*\vec{u_2}+s*\vec{v_2}$

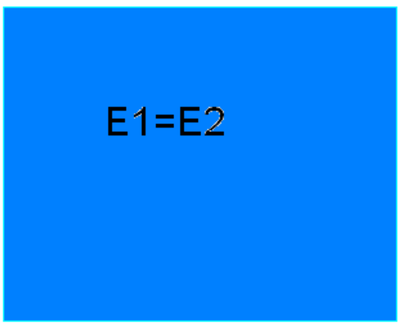
Bedingung: Wurde bereits geprüft, ob die Ebenen parallel sind, so besteht nun noch die Möglichkeit, dass sie identisch sind. Dies prüft man, indem man die beiden Stützvektoren voneinander subtrahiert: $\vec{p_1}-\vec{p_2}=\vec{p_3}$

Sind die Ebenen nun identisch, so muss linear abhängig von und sein:

$r*\vec{u_1}-s*\vec{v_1}=\vec{p_3}$

E_1: $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+r*\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s*\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{x}$ E_2: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+r*\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s*\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{x}$

Rechnung: $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$



Ebenen identisch:

Normalengleichung: E_1: $(\vec{x}-\vec{p_1})*\vec{n_1}=0$ E_2: $(\vec{x}-\vec{p_2})*\vec{n_2}=0$

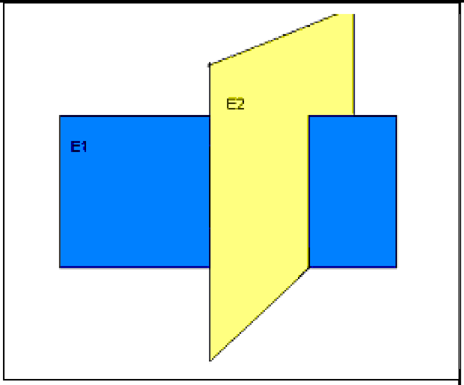
Bedingung: Wurde bereits geprüft, ob die Ebenen parallel sind, so besteht nun noch die Möglichkeit, dass sie identisch sind. Geprüft wird dieses durch das Subtrahieren der beiden Stützvektoren und der anschließenden Prüfung, ob der neue Vektor senkrecht zum Normalenvektor ist:

$\vec{p_1}-\vec{p_2}=\vec{p_3}$ und $\vec{p_3}*\vec{n_1}=0$

E_1: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}\right]*\begin{pmatrix}0\\-5\\8\end{pmatrix}=0$ und E_2: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}\right]*\begin{pmatrix}0\\-5\\8\end{pmatrix}=0$

Rechnung:

$\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\8\\5\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\8\\5\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\-5\\8\end{pmatrix}=0$



Schnittgeradenbestimmung:
Parametergleichungen:

E_1: $\vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u_1} + s * \vec{v_1}$ E_2: $\vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u_2} + s * \vec{v_2}$

Sind die Ebenen nicht parallel zueinander oder setzt man die beiden Ebenengleichungen gleich und erhält unendlich viele Lösungen, so ergibt sich eine Schnittgerade in der sich die Ebenen schneiden:

$$\vec{p_2} + r * \vec{u_2} + s * \vec{v_2} = \vec{p_1} + r * \vec{u_1} + s * \vec{v_1}$$

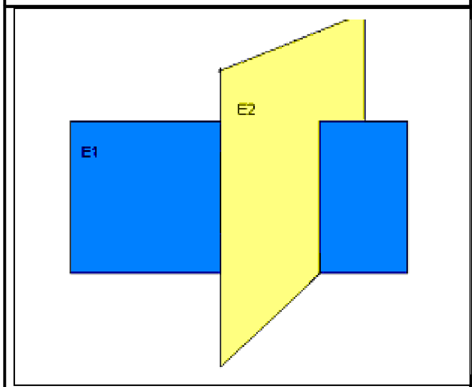
E_1: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{x}$ E_2: $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{x}$

Ermittlung einer Schnittgeraden im LGS:
I. 1+ r+ 3s= -1+ k - 2m ➔ Gleichung I. mit 2 multipliziert und
II . 3- 2r+ s= 5 + k + m mit II. addiert
III. 2 + 4s= 2 + 2k+ 3m

II. 7s-3k+3m= -2 ➔Gleichung II mit 7 multipliziert und Gleichung III mit 4 multi- III. 4s-2k -3m= 0 pliziert. Anschließend III-II gerechnet:

III'. –2k - 33m=8 ➔ k=-4 - 33/2m in E_2 eingesetzt: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + m * \begin{pmatrix} 37 \\ 31 \\ 60 \end{pmatrix}$

Dieser Variante werden die beiden folgenden vorgezogen!!!!!!



Schnittgeradenbestimmung:
Normalengleichung+ Parametergleichung:

E_1: $(\vec{x} - \vec{p_1}) * \vec{n_1} = 0$ E_2: $\vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u_2} + s * \vec{v_2}$

Die Parametergleichung wird in die Normalengleichung eingesetzt für:

$$(\vec{p_2} + r * \vec{u} + s * \vec{v} - \vec{p_1}) * \vec{n_1} = 0$$

E_1: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$ E_2: $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{x}$

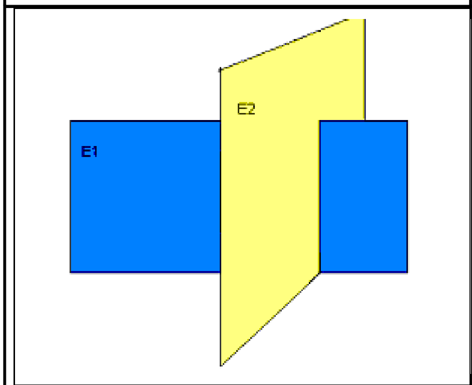
eingesetzt:

$$\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$$

für r= -4 –16,5s

eingesetzt in E_2:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -37 \\ -31 \\ -60 \end{pmatrix}$



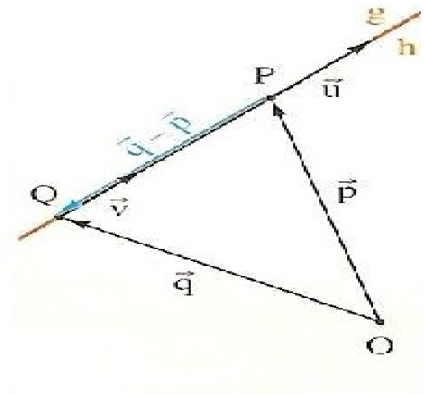
Schnittegeradenbestimmung:
Koordinatengleichung:
E_1: $-8x_1-4x_2+7x_3= -6$ und E_2: $x_1 -7x_2-x_3= -30$
Im LGS einen Wert für ein x ermitteln und einsetzen.

I. $-8x_1-4x_2+7x_3= -6$ Gleichung II mit 8 multipliziert und mit I
II. $x_1- 7x_2 +3x_3 = -30$ addiert:

$-60x_2 +31x_3= -246$ für $x_2 =31t$ eingesetzt ➔ $x_3 = 246/31+ 60t$
eingesetzt in II:

$x_1= -\frac{477}{62} + 37t$
$x_2= -0+ 31t$
$x_3= \frac{246}{31} + 60t$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{477}{62} \\ 0 \\ \frac{246}{31} \end{pmatrix} + m * \begin{pmatrix} 37 \\ 31 \\ 60 \end{pmatrix}$$



Die Geraden g : $\vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u}$ und h : $\vec{x} = \vec{q} + t * \vec{v}$ sind **<u>identisch</u>**, wenn die Vektorgleichung $\vec{p} + r * \vec{u} = \vec{q} + t * \vec{v}$ **unendlich viele Lösungen** hat

1. Bedingung: Der Richtungsvektor $\vec{u}$ muss linear abhängig zu den Richtungsvektor $\vec{v}$ sein

3. Bedingung: Der Richtungsvektor $\vec{u}$ muss linear abhängig zu der Differenz der beiden Stützvektoren $\vec{p} - \vec{q}$ sein

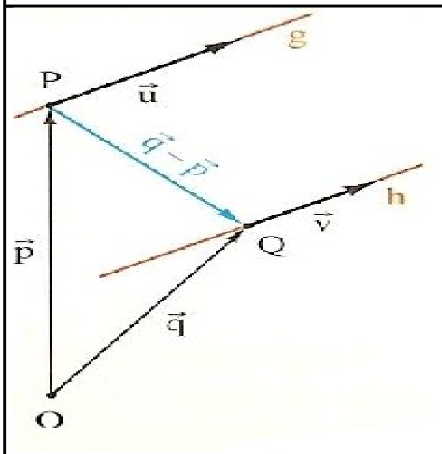
Beispiel:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} ; \; h : \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix} ; \; \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}$$

Prüfen der Bedingungen: $a * \begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ a=0,5 ; linear abhängig**;**

$b * \begin{pmatrix}-2\\-4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ b=-1; linear abhängig

1+2r=3+4t   2r-4t=2
2+4r=6+8t   4r-8t=4
3+1r=4+2t   1r-2t=1
Das LGS hat unendlich viele Lösungen



Die Geraden g : $\vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u}$ und $h : \vec{x} = \vec{q} + t * \vec{v}$ sind **<u>zueinander parallel</u>**, wenn die Vektorgleichung $\vec{p} + r * \vec{u} = \vec{q} + t * \vec{v}$ **keine Lösung** hat
(***Achtung***: Auch bei Windschief)

1. Bedingung: Der Richtungsvektor $\vec{u}$ muss linear abhängig zu den Richtungsvektor $\vec{v}$ sein

2. Bedingung: Der Richtungsvektor $\vec{u}$ muss linear unabhängig zu der Differenz der beiden Stützvektoren $\vec{p} - \vec{q}$ sein

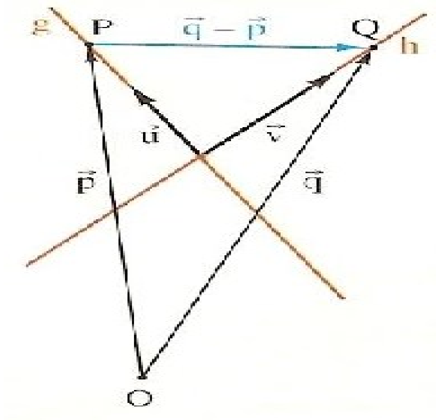
Beispiel:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} ; \; h : \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\7\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix} ; \; \begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\7\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$$

Prüfen der Bedingungen: $a * \begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$ a=0,5; linear abhängig

$a * \begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\7\end{pmatrix}$ keine Lösung; linear unabhängig

3=5t-10r
2=5t-10r
-5=5t-10r
Das LGS hat keine Lösung



Die Geraden g : $\vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u}$ und $h : \vec{x} = \vec{q} + t * \vec{v}$ **schneiden sich in einem Punkt**, wenn die Vektorgleichung $\vec{p} + r * \vec{u} = \vec{q} + t * \vec{v}$ **eine Lösungen** hat

1. Bedingung: Der Richtungsvektor $\vec{u}$ muss linear unabhängig zu dem Richtungsvektor $\vec{v}$ sein
2. Bedingung: Die Differenz der beiden Stützvektoren $\vec{p} - \vec{q}$ muss linear abhängig von denen der beiden Richtungsvektoren der Ebene $\vec{v}$ und $\vec{u}$ sein

Beispiel:

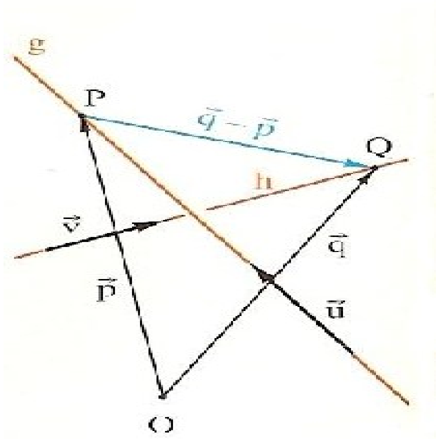
$$g : \vec{x} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \; ; \; h : \vec{x} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Prüfen der Bedingung: $a * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ keine Lösung; linear unabhängig

$a * \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + b * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ a=-1; b=2 , linear abhängig

I. 4=1t+2r   I-II ergibt r=1
II. 5=1t+3r   r einsetzen in I, II oder III ergibt t=2
III. -3=-2t+r

t oder r in die jeweilige Vektorgleichung einsetzen ergibt den Schnittpunkt



Die Geraden g : $\vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u}$ und $h : \vec{x} = \vec{q} + t * \vec{v}$ sind **zueinander windschief**, wenn die Vektorgleichung $\vec{p} + r * \vec{u} = \vec{q} + t * \vec{v}$ **keine Lösung** hat (***Achtung***: Auch bei Parallel)

1. Bedingung: Der Richtungsvektor $\vec{u}$ muss linear unabhängig zu dem Richtungsvektor $\vec{v}$ sein
2. Bedingung: Die Differenz der beiden Stützvektoren $\vec{p} - \vec{q}$ muss linear unabhängig von denen der beiden Richtungsvektoren der Ebene $\vec{v}$ und $\vec{u}$ sein

Beispiel:

$$g : \vec{x} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; h : \vec{x} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Prüfen der Bedingungen: $a * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ keine Lösung; linear unabhängig

$a * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ keine Lösung; zueinander windschief

4=1t-2r
5=1t-3r
-2=-2t-r
Das LGS hat keine Lösung